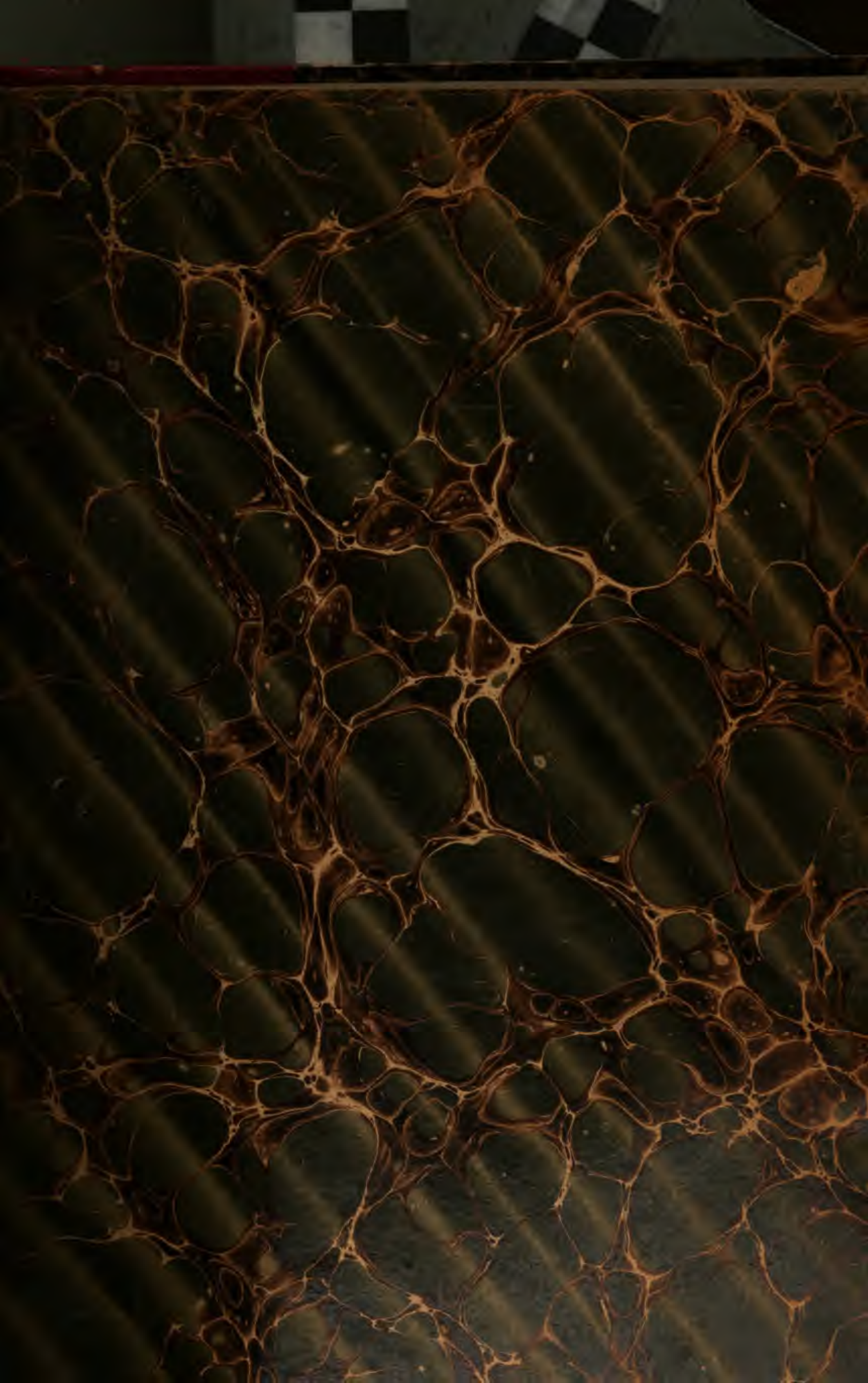

UC-NRLF
$B 24 613



REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received June, 1889
Accessions No. 38966 Shelf No.



COURS

DE

PHYSIQUE

CONDITIONS DE LA PUBLICATION

Le tome premier du **Cours de Physique** forme un volume de mille pages publié en 2 parties (PHYSIQUE MOLÉCULAIRE).

PRIX DU TOME I. . . . . 28 fr.

Le tome II sera également publié en 2 parties.

En vente la 1re partie : **Acoustique**.

Un fascicule de 300 pages. Prix. . . . . 9 fr.

L'OUVRAGE COMPLET FORMERA QUATRE VOLUMES

4814-81. — CORBEIL. Imprimerie CRÉTÉ.

COURS
DE
PHYSIQUE

PAR

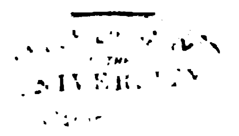
J. VIOLLE

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE

TOME II
ACOUSTIQUE ET OPTIQUE

PREMIÈRE PARTIE
ACOUSTIQUE

Avec 163 figures dans le texte.



PARIS
G. MASSON, ÉDITEUR
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, Boulevard Saint-Germain, en face de l'École de Médecine

M DCCC LXXXVIII

CP.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME II

ACOUSTIQUE

CHAPITRE I

NATURE ET CARACTÈRES DU SON

CHAPITRE II

INTERVALLES MUSICAUX

CHAPITRE III

PROPAGATION DU SON

CHAPITRE IV

INTERFÉRENCES DU SON

CHAPITRE V

TUYAUX SONORES

CHAPITRE VI

CORDES VIBRANTES

CHAPITRE VII

VERGES VIBRANTES

CHAPITRE VIII

MEMBRANES ET PLAQUES

CHAPITRE IX

COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES

CHAPITRE X

INTENSITÉ. — TIMBRE

COURS
DE PHYSIQUE

ACOUSTIQUE

CHAPITRE PREMIER

NATURE ET CARACTÈRES DU SON

324. Nature du son. — L'acoustique (ἀκούω, entendre) a pour objet l'étude du son.

Sous le rapport physique, le son peut se définir un mouvement vibratoire excité dans un corps et transmis à l'oreille par une suite non interrompue de milieux pondérables élastiques ([1]).

Le son est un mouvement vibratoire de la matière. — Par mouvement vibratoire d'un point, on entend un mouvement dans lequel le point, écarté de sa position d'équilibre, y revient, la dépasse, y revient en sens contraire pour la dépasser de nouveau jusqu'à regagner sensiblement son lieu de départ, et ainsi de suite. Chaque déplacement complet, aller et retour, constitue une oscilla-

([1]) C'est presque exactement la définition d'Aristote : Γίνεται δ'ό κατ' ἐνεργείαν ψόφος ἀεί τινος πρός τι καὶ ἔν τινι · πληγὴ γάρ ἐστιν ἡ ποιοῦσα. (Le son, en acte, se produit toujours d'un corps vers un autre et dans quelque autre : c'est un choc qui le détermine.) Aristote, *De l'âme*, VIII, 2.

tion d'après la définition adoptée pour le mouvement pendulaire, le type des mouvements vibratoires.

Que tout corps émettant un son soit le siège d'un mouvement vibratoire de l'ensemble de ses parties, c'est ce qui tombe immédiatement sous les sens. On *voit* les déplacements d'une corde, d'une verge, d'un diapason qui résonnent, ou du moins, par l'effet de la persistance des impressions sur la rétine, on perçoit en même temps tous ces déplacements, trop rapides pour être saisis isolément : la corde se transforme ainsi en un fuseau translucide, presque



Fig. 1

transparent dans la région la plus large; la verge s'épanouit en éventail; chaque branche du diapason s'élargit à sa partie supérieure. Les mouvements d'un verre à boire que l'on vient de heurter, d'un timbre sur lequel on a frappé, d'un diapason dont on a séparé brusquement les deux branches, sont sensibles au *toucher;* et, dès que le contact de la main a fait cesser la vibration, le son

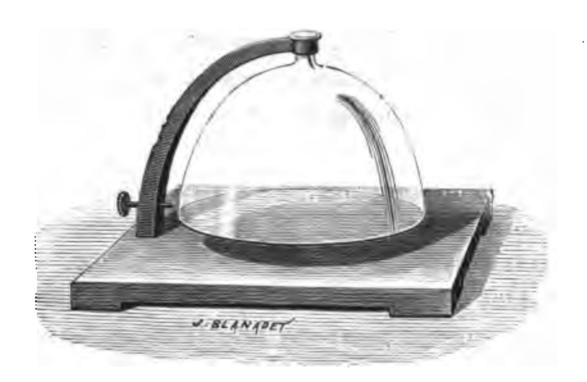


Fig. 2

s'éteint. En amenant une pointe au voisinage d'une cloche qui sonne, on *entend* une série de chocs résultant des renflements et

des aplatissements successifs de la cloche. On peut faire la même expérience au moyen d'un pendule approché de la cloche qui le

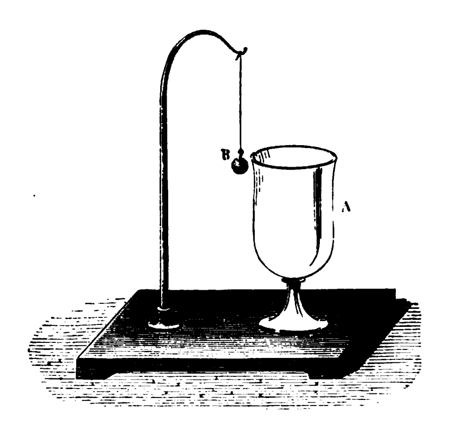


Fig. 3

projette au loin ; un effet semblable s'observe avec un diapason, avec une verge. Les sautillements du sable sur une membrane

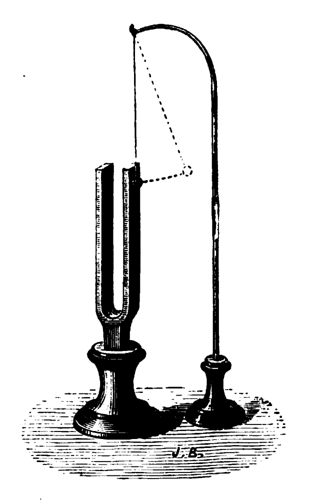


Fig. 4

introduite dans un tuyau sonore attestent les mouvements vibratoires du fluide intérieur. Nous apprendrons plus tard à pénétrer davantage la nature de ces mouvements. Leur existence dans

tous les cas où un corps rend un son est suffisamment établie par les faits qui viennent d'être rappelés.

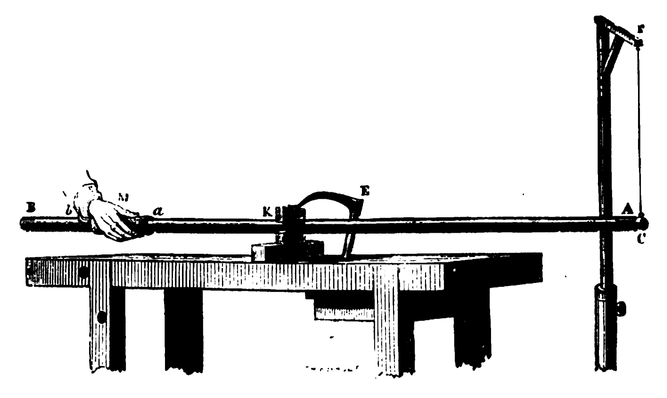


Fig. 5

Le son exige, pour se transmettre à l'oreille, une suite non interrompue de milieux élastiques pondérables. — On vérifie sans peine la deuxième partie de la définition relative à la nécessité d'un

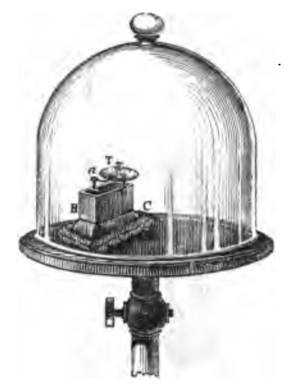


Fig. 6

milieu ou d'une suite continue de milieux pondérables entre le corps sonore et l'oreille. Otto de Guericke (¹) suspendit par un fil (²)

(¹) Otto de Guericke, *loc. cit.*

(²) Il est nécessaire d'isoler aussi parfaitement que possible la sonnerie, soit en la faisant reposer sur un épais coussin de ouate, soit plutôt en la soutenant par un fil; sinon, le son ne disparaît pas.

une sonnerie à l'intérieur d'un récipient qu'il réunit à sa machine pneumatique; il constata que le son allait s'affaiblissant à mesure qu'on enlevait l'air, et finissait par ne plus s'entendre. Papin ([1]) fit l'expérience devant les membres de la Société royale de Londres au moyen d'un sifflet ajusté à l'entrée du réci-

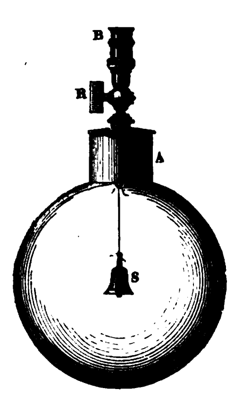


Fig. 7

pient; et Hawksbee la répéta avec un ballon renfermant une clochette ([2]).

De ce que l'air est le véhicule ordinaire du son, il ne faudrait pas conclure qu'il soit seul capable de le transmettre. Si, à l'exemple de Biot ([3]), on laisse rentrer dans le ballon d'Hawksbee un gaz quelconque, une vapeur (quelques gouttes d'éther introduites par le robinet et vaporisées immédiatement), on rétablit aussitôt le son avec une intensité d'autant plus marquée que la densité du fluide élastique est elle-même plus grande.

Otto de Guericke, rappelant que les poissons s'enfuient au moindre bruit, comme ils viennent au son de la cloche ou du sifflet

([1]) Papin, *Procès-verbal de la séance de la Société royale du 23 février* 1685, dans Birch, *History of the Royal Society*, IV. London; 1757.

([2]) Il fit aussi l'expérience inverse en comprimant de l'air dans le ballon et en montrant que le son devient alors plus intense (Hawksbee, *Phil. Trans.*, 1705). Hawksbee, qui succéda à Hooke comme *curator of experiments* à la Société royale, a réuni ses recherches dans son livre *Physico-mechanical experiments*. London; 1709.

([3]) Biot, *Traité de physique*, II, 4. Paris; 1816.

quand ils sont apprivoisés, en concluait que les liquides sont propres à transmettre le son. En effet, la tête dans l'eau, on entend parfaitement le roulement lointain des galets ; on distingue même les paroles prononcées dans l'air, mais fort affaiblies, une partie seulement du son franchissant la surface de séparation des deux milieux. Les solides élastiques conduisent également bien le son : l'oreille collée au sol distingue de très loin le bruit du canon, le roulement d'une voiture, le piétinement des chevaux. La conductibilité sonore du bois est remarquable : le léger choc de la tête d'une épingle contre l'une des extrémités d'une longue poutre de sapin se perçoit nettement à l'autre extrémité. Au contraire, les corps dénués d'élasticité, tels que la ouate, le coton, le duvet, la sciure de bois, transmettent mal le son. Les tapisseries étouffent les bruits, et une portière de tissu épais empêche complètement d'entendre ce qui se passe dans la pièce voisine.

Ces faits vulgaires montrent que le son peut être transmis plus ou moins parfaitement par tout milieu pondérable élastique. Mais il ne se propage pas dans le vide. Le vide est absolument muet. Les espaces célestes sont éternellement silencieux, et les cataclysmes les plus effrayants d'un monde ne peuvent être entendus par le reste de l'univers.

325. Qualités du son. — Le son est donc un mouvement vibratoire général de la matière pondérable. Un tel mouvement peut présenter des variétés à l'infini, comme amplitude, comme durée de l'oscillation, comme forme même de la trajectoire parcourue par chaque point du système vibrant. A ces différentes conditions correspondent les diverses qualités du son : l'*intensité*, la *hauteur*, et le *timbre*.

326. Intensité. — L'intensité dépend visiblement de l'amplitude des vibrations : plus la corde a été attaquée vivement par l'archet, plus le battant a frappé violemment la cloche, plus le son est intense : en tout cas, à mesure que les oscillations décroissent, il faiblit quoique conservant même hauteur, et il s'éteint avec le mouvement.

327. Hauteur. — La hauteur du son, ou sa tonalité, est déterminée par le nombre des vibrations.

Expérience du P. Mersenne. — Le P. Mersenne tendit une corde de chanvre assez longue (30 mètres) pour que l'œil en suivît aisément les déplacements : elle ne rendait alors point de son, mais on pouvait compter le nombre de ses vibrations dans un temps donné. Il raccourcit ensuite la longueur de cette corde à moitié, et trouva que, dans le même temps, elle effectuait un nombre double d'oscillations. En la réduisant au tiers, au quart....., il vit les oscillations devenir trois, quatre..... fois plus rapides; et il établit ainsi que, toutes choses égales d'ailleurs, le nombre des oscillations d'une corde est inversement proportionnel à la longueur de cette corde. Quand elle fut suffisamment réduite, la corde émit un son, et ce son, comme on le savait déjà, monta à mesure que la corde devint plus courte. Il fut donc prouvé que la hauteur du son s'accroît lorsque le nombre des vibrations augmente. Ce nombre lui-même peut toujours se déterminer par la longueur de la corde produisant le son. Tel est le principe du *sonomètre*, plus particulièrement appelé *monocorde* quand il ne porte qu'une corde, ce qui suffit pour les expériences actuelles [1].

Expérience de Chladni [2]. — On peut faire la même expérience avec une verge élastique pincée dans un étau, comme celle de la figure 8 : la verge étant d'abord assez longue pour que l'on puisse en compter les vibrations, on constate que le nombre des vibrations exécutées en une seconde est inversement proportionnel au carré de la partie vibrante ; puis, la verge continuant à se raccourcir, il se produit un son de hauteur croissante. Chladni avait même espéré obtenir ainsi des corps sonores à nombres de vibrations connus, au moyen desquels

[1] Ces expériences sont décrites dans l'énorme in-folio du P. Mersenne, *Harmonie universelle*. Paris; 1636. D'autre part, la relation entre la hauteur d'un son et le nombre des vibrations est énoncée par Galilée, dans ses *Dialogues sur deux sciences nouvelles*, publiés à Leyde par les Elzevir, en 1638, mais composés bien auparavant. Il est difficile de savoir à qui appartient réellement la première idée de cette relation fondamentale, qui ouvrit à la physique l'étude du son, jusqu'alors uniquement physiologique.

[2] Chladni, *Traité d'acoustique*, édition française, p. 9. Paris; 1809.

il aurait pu aisément déterminer le nombre de vibrations d'un son donné quelconque. Mais la loi sur laquelle il s'appuyait

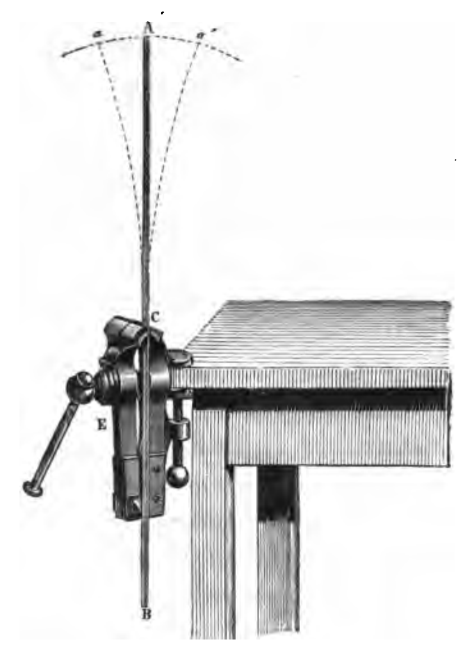


Fig. 8

éprouve dans la pratique des perturbations qui rendent le procédé inexact.

328. Périodicité du mouvement vibratoire constitutif du son. — La méthode du P. Mersenne permet en outre d'observer que les oscillations de la corde sont *périodiques*, en d'autres termes, qu'après un temps toujours exactement le même, et que l'on appelle la *période*, le corps est revenu au même état. Cette périodicité est le vrai caractère du son musical, tandis que le bruit est constitué par une succession d'ébranlements incohérents : c'est ainsi que le fracas de la tempête, le roulement d'une voiture sur le pavé, le bruissement des feuilles dans la forêt, apportent à l'oreille un chaos de sonorités se précipitant et se mêlant sans règles : il n'y a plus à proprement parler de hauteur.

Bruit. — Toutes les fois que le caractère de hauteur reste ainsi obscur, on dit qu'il y a bruit, bien que parfois ce qui empêche de juger de la hauteur soit simplement le peu de durée des vibrations : le bruit du marteau frappant sur l'enclume, du pistolet qui part, de la bouteille que l'on débouche, est véritablement un son dont une oreille attentive saura fixer la hauteur. La qualité fondamentale du son apparaît sans conteste dès que plusieurs de ces bruits se succèdent rapidement. On trouve dans tous les cabinets de physique une série de planchettes qui, jetées à terre les unes après les autres, font entendre la gamme, et un jeu de tubes qu'il suffit de déboucher successivement pour produire l'accord parfait.

Exemples de mouvements périodiques. — Tout en étant périodique, un mouvement peut d'ailleurs affecter les formes les plus variées ; ce sera par exemple le mouvement d'un marteau de forge mû par une roue hydraulique, ou celui d'une balle renvoyée par une raquette, aussi bien que le mouvement d'un pendule oscillant sous l'action de la pesanteur.

Afin de nous représenter nettement ces divers mouvements, traçons dans chaque cas la courbe ayant pour abscisses les temps et pour ordonnées les distances correspondantes du mobile à sa position d'équilibre.

Considérons d'abord le pendule : la formule qui lie les déplacements aux temps (86) est, c désignant une constante,

$$\theta = \alpha \cos ct,$$

ou, si l'on recule de $\frac{\pi}{2c}$ l'origine des temps,

$$\theta = \alpha \sin ct :$$

la courbe représentative est donc une sinussoïde. Sur la figure 9, la période $eg = \frac{2\pi}{c} = \tau$ a été partagée en douze parties égales : le mobile, parti à l'origine de la position d'équilibre e, s'en éloigne jusqu'à l'époque $\frac{3}{12}\tau$, où il atteint son plus grand écart positif α,

puis se rapproche de cette position, y passe à l'époque $\frac{6}{12}\tau$, s'éloigne de nouveau jusqu'à la distance $-\alpha$, revient, et enfin au bout du temps τ est de retour au point de départ ; et les mêmes alternatives recommencent. On se représentera exactement ce mou-

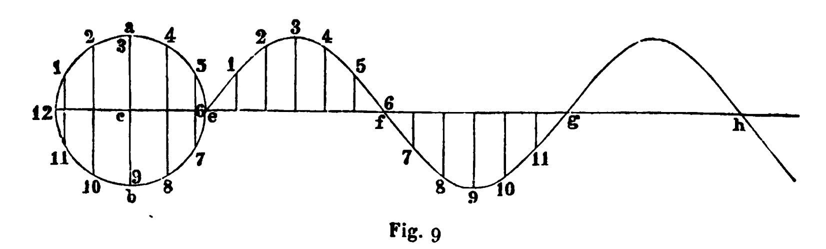


Fig. 9

vement en faisant glisser horizontalement sur la figure une carte percée d'une fente verticale étroite, qui ne laisse voir qu'un point de la courbe : ce point se déplacera le long de la fente comme le mobile sur sa trajectoire [1].

La figure 10 fait voir le mouvement du marteau de forge,

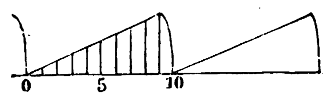


Fig. 10

montant pendant les $\frac{9}{10}$ de la période et retombant brusquement pendant le dernier $\frac{1}{10}$.

Pour la balle lancée par la raquette, la courbe représentative

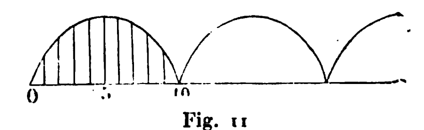


Fig. 11

du mouvement est une série d'arcs de paraboles symétriques par rapport à l'ordonnée maximum (84), le passage d'un arc à l'autre

[1] On peut aussi se représenter le mouvement du pendule en imaginant qu'un point *a* tourne avec une vitesse constante sur le cercle *c*, supposé placé très loin et de manière à laisser voir seulement sa tranche : le point semblera alors monter et descendre le long du diamètre *ab*, d'un mouvement qui obéira exactement à la même loi que la vibration pendulaire (86).

s'effectuant brusquement au moment où la balle reçoit un coup qui la renvoie vers le haut [1].

Toutes ces sortes de mouvements peuvent engendrer des sons, à la seule condition d'être assez rapides. Le mouvement des branches du diapason est un mouvement pendulaire. Le mouvement du marteau de forge représente assez bien celui d'une corde de violon excitée par l'archet (ce dernier mouvement diffère beaucoup de celui de la corde oscillant librement). La balle lancée par la raquette est l'image de l'air chassé de sa position primitive par une impulsion brusque dans la sirène ou la roue dentée.

329. Production du son par une succession rapide de chocs également espacés. — On peut en effet produire directement des sons par une succession régulière et suffisamment rapide de chocs. Ce mode de production, tout en confirmant ce qui précède, aura de plus, en général, l'avantage de nous permettre de connaître immédiatement le nombre des vibrations du son produit.

Crécelle. — Prenons par exemple une crécelle, et faisons-la tourner rapidement : nous entendrons un son continu, ou plus exactement deux sons distincts : l'un, produit par le choc même de la lame vibrante, et qui dépend de la nature de l'instrument, mais qui, pour un instrument donné, n'est affecté en rien par la rapidité de la rotation ; l'autre, dû à la répétition des chocs et réglé par leur nombre. Suivant que la lame vibrante sera dure et épaisse, ou mince et flexible, l'un de ces sons l'emportera sur l'autre [2]. Il est même facile de faire en sorte que le son dû à la succession des chocs prédomine presque absolument.

Roue dentée. — Tel est le cas avec la roue dentée de Savart [3], sorte

(1) Ces exemples et ces figures sont empruntés à l'ouvrage de M. von Helmholtz, *Théorie physiologique de la musique*, traduction Guéroult. Paris, Masson ; 1868.

(2) On vérifie le fait avec les deux crécelles de Marloye : dans l'une, le son n'est pas changé par la vitesse de rotation, mais il baisse d'une quinte lorsqu'on ouvre le fond de la crécelle ; avec l'autre, le son monte régulièrement à mesure que la vitesse augmente.

(3) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLIV, 337 ; 1830. Déjà Hooke avait fait devant la Société royale de Londres, en 1681, des expériences sur la production du son au moyen des roues dentées ; et Stancari avait montré à l'Académie de Bologne, en 1706, qu'une grande roue, garnie de longs clous sur sa circonférence, donnait, en tournant dans l'air, un son dont la hauteur croissait avec la vitesse de la rotation et dont le nombre des vibrations en une seconde pouvait aisément se calculer, cette vitesse étant connue.

de grande crécelle dont les dents, également espacées, viennent frapper une carte très courte. L'appareil comprend ordinairement quatre roues dentées dont les nombres de dents sont comme les nombres 4, 5, 6, 8 (caractéristiques de l'accord parfait). En impri-

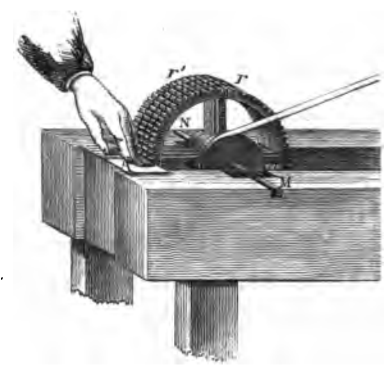


Fig. 12

mant au système différentes vitesses de rotation, en présentant la carte aux différentes roues, on reconnaît aisément, sans mesure aucune, que la hauteur du son croît avec la vitesse ainsi qu'avec le nombre des dents, et par conséquent avec le nombre des vibrations. Le nombre des vibrations doubles du son engendré est en effet égal au nombre des chocs, lequel est lui-même égal au produit du nombre des dents de la roue (1) par le nombre des tours en une seconde. Ce dernier nombre peut se mesurer à l'aide d'un compteur (semblable à celui qui sera décrit à propos de la sirène). Pour les grandes vitesses, Savart préférait se servir d'une deuxième roue, calée sur le même axe que la première, et portant un nombre de dents trente ou quarante fois moindre que celle-ci : le son de cette deuxième roue étant beaucoup plus grave, il était facile d'en prendre l'unisson sur un monocorde, et par suite d'en déterminer le nombre de vibrations, d'où l'on concluait le nombre de tours de la roue. Mais, à ces grandes vitesses, la roue dentée,

(1) En enlevant les dents sur une partie de la circonférence, Savart a reconnu qu'il suffit de laisser deux dents, avec leur écartement primitif, pour que le son, devenu, il est vrai, intermittent, conserve la même hauteur que dans le cas où toutes les dents sont en place ; mais il n'a pas pu déterminer ainsi pendant combien de temps la sensation auditive se prolonge au delà du fait physique qui l'a fait naître.

toujours médiocre au point de vue de la qualité du son, devient tout à fait défectueuse ; l'intensité du son baisse beaucoup, en même temps que la mesure du nombre des vibrations est très incertaine, rien ne prouvant que la carte heurtée par une dent ait eu le temps de revenir à sa position première avant le passage de la dent suivante.

Appareil de Trevelyan. — Un curieux exemple de son produit par une série de chocs nous est offert dans l'expérience dite de Trevelyan [1]. Un prisme triangulaire ou berceau, en laiton, creusé d'une gouttière sur sa face inférieure, est chauffé un peu au-dessus de 100 degrés et posé sur le bord d'un bloc de plomb : un son se produit alors, tandis que le berceau oscille visiblement. Quand l'un des bords de la gouttière touche le bloc, la chaleur apportée au point de contact par le berceau et maintenue en ce point par

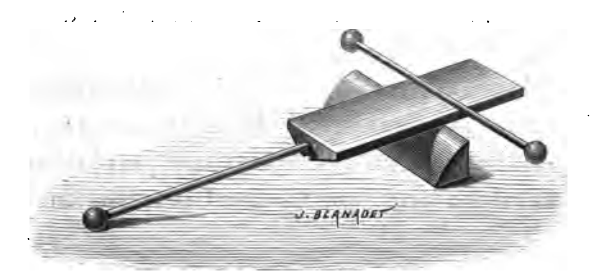


Fig. 13

la mauvaise conductibilité du plomb, y détermine un mamelon qui fait basculer le berceau sur l'autre bord de la gouttière, où le même effet se reproduit. Le berceau est ainsi ballotté alternativement de droite à gauche et de gauche à droite, et la succession des petits coups qu'il frappe contre le plomb engendre un son musical, dont la hauteur baisse, si par une surcharge on ralentit les oscillations. M. Tyndall fait l'expérience avec une pelle

[1] Le fait fut d'abord observé, paraît-il, dans une fonderie de Saxe, en 1805, par un certain Schwartz qui, ayant placé sur une enclume une masse d'argent chaude, fut tout surpris de l'entendre chanter. En 1829, Trevelyan retrouva par hasard le même phénomène en posant un fer à souder sur un morceau de plomb ; il reproduisit l'expérience en la variant, et lui donna sa forme actuelle (Voir Tyndall, *la Chaleur*, 1re édition française, appendice à la leçon IV).

à feu qu'il pose, après l'avoir chauffée, sur deux lames de plomb pincées dans un étau; une simple bague ou une pièce de mon-

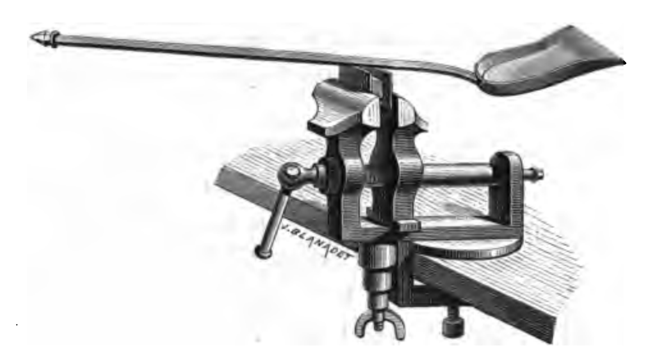


Fig. 14

naie, chauffée et mise de champ sur un morceau de plomb, peut également vibrer et chanter (¹).

Sirène. — Mais l'appareil le plus important dans ce genre est la *sirène*, imaginée par Cagniard de La Tour (²) en 1819.

La pièce essentielle est un disque tournant percé de trous à égale distance les uns des autres, qui viennent successivement se placer

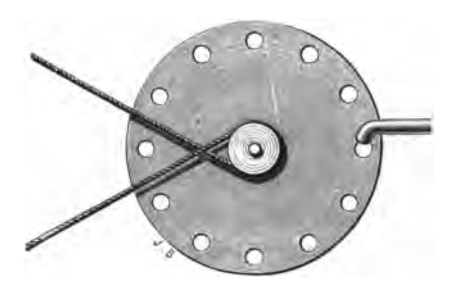


Fig. 15

en regard d'un orifice par lequel s'échappe un courant d'air. A chaque coïncidence des ouvertures, l'air extérieur reçoit un choc qui cesse dès qu'un plein s'est substitué à un vide en face de l'ori-

(¹) Voir Tyndall, *la Chaleur*, 2e édition française, p. 100. Paris, Gauthier-Villars; 1874.

(²) Cagniard de La Tour, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XII, XVIII et XXXV; 1819-27.

fice; ces chocs périodiques, lorsqu'ils se succèdent un peu rapidement, donnent naissance à un son dont la hauteur dépend de la vitesse de rotation communiquée au disque. L'appareil, tel que nous venons de le décrire, est souvent désigné sous le nom de *Sirène de Seebeck*, parce que Seebeck l'a employé en effet sous cette forme

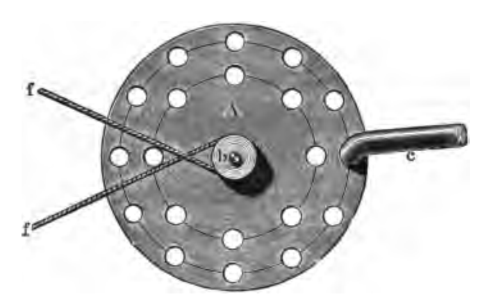


Fig. 16

(avec un disque portant plusieurs rangées de trous) à des recherches sur les éléments des sons complexes.

Dans l'appareil original de Cagniard de La Tour, tel qu'on le

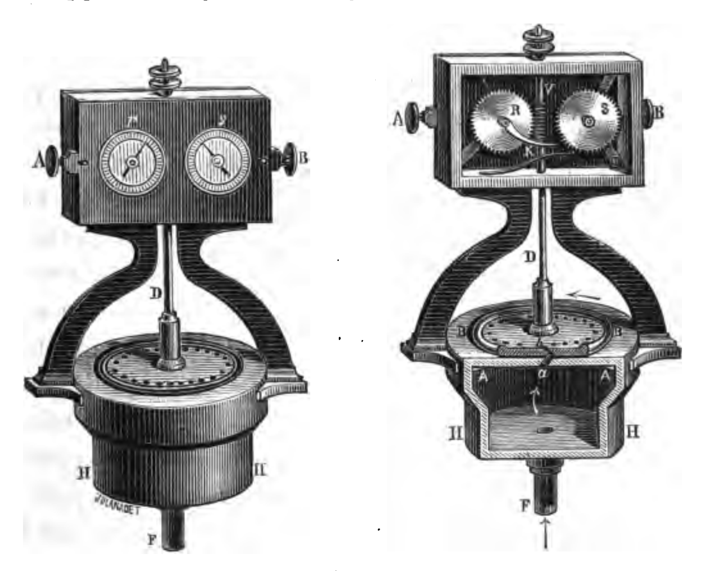


Fig. 17

construit encore aujourd'hui, le mouvement du disque mobile est produit par le courant d'air lui-même : et, pour augmenter la force

motrice, pour accroître en même temps l'intensité du son, on envoie le courant d'air, non par un orifice unique, mais par une série d'orifices disposés de façon à se trouver en même temps tous ouverts ou tous fermés. Ces orifices, en nombre égal à celui des trous du plateau mobile, sont percés dans un plateau fixe AA, formant le couvercle d'une sorte de boîte HH dans laquelle arrive par le tube F l'air d'une soufflerie. Au-dessus du plateau AA, et à très petite distance, est placé le plateau mobile BB, fixé à un axe vertical D, qui peut tourner librement sur les pointes de deux vis le saisissant à ses extrémités. Les trous des deux plateaux sont inclinés en sens contraire dans un plan perpendiculaire au rayon. De cette disposition il résulte que, si les ouvertures des deux plateaux sont d'abord superposées, l'air arrivant par les trous inférieurs *a* vient frapper à peu près perpendiculairement la paroi des trous supérieurs *b*, et pousse le plateau mobile. Celui-ci se mettra donc à tourner avec une vitesse dépendant de la pression de l'air insufflé, et il ouvrira et fermera périodiquement les orifices de sortie de l'air ([1]).

Le nombre des impulsions communiquées à l'air extérieur étant égal au produit du nombre des trous du plateau par le nombre des tours de l'axe, il faut pouvoir évaluer ce dernier nombre pendant un temps donné. A cet effet, la sirène porte en haut un compteur, formé de deux roues dentées R et S : la roue R engrène avec une vis sans fin V, pratiquée sur la partie supérieure de l'axe, et marche d'une dent pour un tour de l'axe. Chaque fois que la roue R a fait un tour entier, un appendice latéral K, fixé à cette roue, vient rencontrer la roue S et la fait avancer exactement d'une dent, un petit ressort placé au-dessous ne laissant échapper qu'une dent à la fois. Si donc la roue R a 100 dents, tandis qu'une aiguille attachée à cette roue comptera les tours, une deuxième aiguille entraînée par la roue S marquera les centaines de tours. Tout ce système est monté sur une plaque verticale AB qui peut recevoir un petit déplacement dans le sens horizontal ; de sorte qu'en pressant sur le bou-

([1]) Quand la sirène va un peu vite, outre le son principal, on entend un son beaucoup plus grave, que l'on appelle le *son d'axe*, et qui provient de ce que l'axe de rotation, n'étant pas exactement un axe principal d'inertie, vient à chaque révolution battre deux fois contre ses supports.

ton A on fait engrener la roue R avec la vis sans fin V ; en pressant sur B on désengrène.

La marche d'une expérience est alors la suivante. Le compteur étant hors prise, le son produit par la sirène est amené à la hauteur voulue ([1]), et la pression est réglée de façon à maintenir cette hauteur exactement constante. A un instant donné par un chronomètre, on pousse le bouton A, le compteur entre en mouvement, l'expérience commence. Quand on veut y mettre fin, on presse le bouton B, en même temps qu'on marque l'heure au chronomètre.

Il y a nécessairement au début et à la fin quelque incertitude sur l'époque exacte de la mise en marche et de l'arrêt du compteur ; de plus, celui-ci ne marquant que les tours entiers et non les fractions de tours, le nombre total des oscillations doubles du son que l'on observe peut être erroné de $k-1$, k étant le nombre des trous du plateau. On atténuera l'influence de ces causes d'erreur en prolongeant le plus possible la durée de l'expérience. Toutefois, il n'est pas facile de maintenir un peu longtemps le son absolument fixe, ce qui est cependant la condition essentielle d'une mesure précise. On emploiera avantageusement le régulateur de Cavaillé-Coll, sorte de petit soufflet à contre-poids, traversé par le vent de la soufflerie. Pour combattre la tendance du son à monter, on peut également s'aider soit d'un régulateur à ailettes fixé sur la sirène, ainsi que le faisait Cagniard de La Tour (qui, lui, ne se servait pas d'autre soufflerie que de sa bouche), soit d'un régulateur électro-magnétique ([2]), soit simplement d'une faible pression du doigt : ici, comme partout, l'habileté de l'opérateur peut suppléer aux imperfections de l'appareil. Mais pour se mettre complètement à l'abri des variations du

([1]) Pour les sons très élevés, on peut, à l'exemple de Cagniard de La Tour, lancer l'appareil avec un ruban préalablement enroulé sur l'axe comme la ficelle d'une toupie ; il suffit alors de maintenir la vitesse pendant le temps nécessaire à l'expérience.

([2]) M. Bourbouze construit une sirène dont le réglage est fondé sur le ralentissement qu'un aimant apporte à la vitesse d'une masse métallique en mouvement dans le voisinage. Un disque en cuivre rouge, fixé sur l'axe de la sirène, passe entre les deux pôles d'un électro-aimant que l'on peut approcher ou éloigner de façon à en modifier l'action. La sirène étant mise en mouvement au moyen d'un soufflet à émailleur ou d'une trompe, qui fournisse un courant d'air capable de donner un son supérieur à celui que l'on veut mesurer, on approche les pôles magnétiques jusqu'à ce que l'on obtienne le son voulu.

son, le mieux est d'imprimer à la sirène son mouvement de rotation par un moteur indépendant, comme Seebeck l'a fait depuis. M. von Helmholtz a employé à cet effet une petite machine magnéto-électrique, munie d'un régulateur à force centrifuge qui interrompait le courant dès que la vitesse de rotation commençait à dépasser une certaine valeur; il a obtenu ainsi « des sons d'une hauteur extraordinairement constante, rivalisant avec ceux des tuyaux d'orgue les mieux construits ».

Dove a ménagé dans le plateau plusieurs séries de trous pouvant fonctionner à volonté ensemble ou séparément; et M. von Helmholtz, réunissant deux sirènes polyphones de Dove, a combiné un instrument qui se prête à un grand nombre de démonstrations intéressantes. N'oublions pas enfin que la sirène peut parler dans l'eau (c'est l'origine de son nom) : pour cela, il suffit qu'elle soit immergée complètement et alimentée par un courant d'eau sous pression convenable.

330. Mesure de la hauteur d'un son. — L'oreille estime avec beaucoup d'exactitude l'égalité de hauteur de deux sons : deux cordes étant amenées à l'unisson, il suffira de changer très peu la longueur de l'une d'elles pour produire un désaccord sensible. Les appareils précédents (monocorde, sirène, roue dentée) permettent de vérifier que deux sons jugés par nous à l'unisson, le son d'une corde et celui de la sirène, par exemple, battent le même nombre de vibrations, quelles que puissent être d'ailleurs leurs différences d'intensité et de timbre.

En conséquence, ces mêmes appareils serviront à mesurer le nombre de vibrations d'un son donné quelconque. Il suffira de prendre l'unisson de ce son sur le monocorde, sur la sirène ou sur la roue dentée, et de mesurer le nombre des vibrations du son émis alors par l'appareil employé.

Le *monocorde* est commode pour une évaluation rapide de la hauteur d'un son. C'est une corde tendue sur une table entre deux chevalets fixes, et sous laquelle peut se déplacer un troisième chevalet mobile en regard d'une règle divisée. La corde est attachée d'un bout à une cheville fixe, de l'autre à une vis qui règle sa tension. En agissant sur cette vis, on amène la corde, vibrant dans

toute sa longueur, à rendre un son déterminé de hauteur connue (le *la* du diapason par exemple) ; puis, au moyen du chevalet mo-

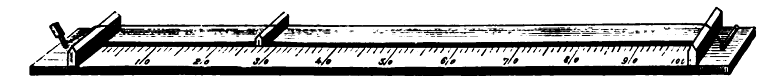


Fig. 18

bile, on réduit la longueur de la portion vibrante de façon à lui faire rendre le son que l'on veut évaluer. Le rapport de cette longueur à la longueur totale de la corde (entre les deux chevalets fixes) est égal au rapport inverse des nombres de vibrations effectuées par la corde dans les deux cas.

Au monocorde on substituera avantageusement un sonomètre, muni d'une caisse d'harmonie qui amplifie le son, et pourvu

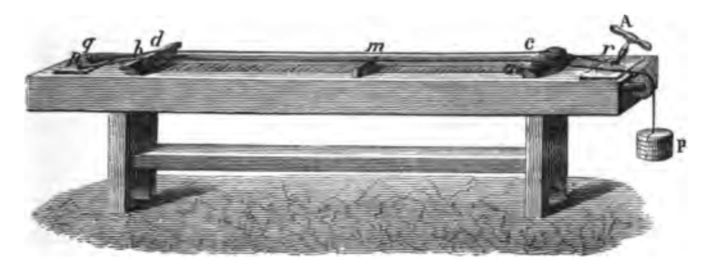


Fig. 19

de plusieurs cordes : l'emploi d'une deuxième corde, mise à l'unisson de la première, permet de vérifier qu'à la fin de l'opération la corde en expérience a bien gardé le son auquel on l'avait accordée.

La *sirène* permet de faire des déterminations plus exactes : elle est beaucoup plus facile à employer et moins sujette à erreur que la *roue dentée* par laquelle Savart avait voulu la remplacer.

331. Méthode graphique. — Le procédé le plus précis pour déterminer le nombre des vibrations d'un son dans un temps donné consiste à faire inscrire au corps sonore lui-même ses vibrations. Un style A, adapté au corps (constitué ici par une tige vibrante T), appuie sur un cylindre enfumé EF, tournant autour d'un axe VD,

parallèle au plan dans lequel s'effectuent les vibrations. L'une des extrémités T de l'axe est filetée et passe dans un écrou fixe, de sorte que, le cylindre tournant et avançant à la fois, la courbe se développe en une spirale dentelée dont chaque sinuosité correspond à une vibration du corps en expérience. Le nombre de vibrations effectuées dans un temps donné s'en déduira immédiatement

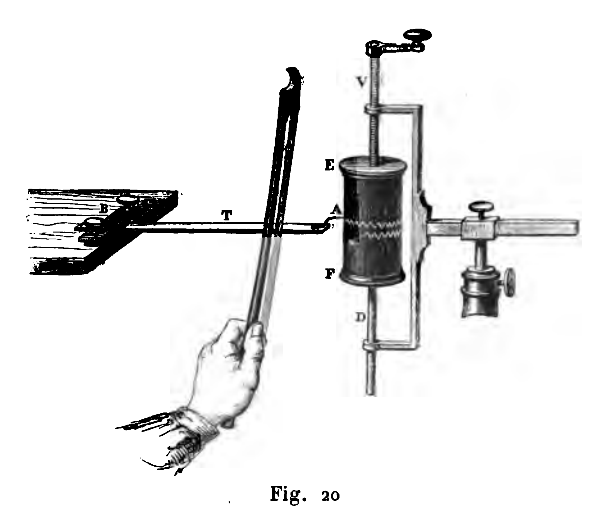


Fig. 20

si l'on connaît la vitesse du cylindre. Sans doute il est possible avec des régulateurs convenables (82) d'obtenir, malgré les frottements variables du système, un mouvement de rotation uniforme, et d'en évaluer la vitesse au moyen d'un chronomètre. On peut même faire tracer à un chronomètre pointeur pour chaque seconde une marque sur le cylindre tournant. Mais, outre la difficulté de relever exactement cette marque, on doit toujours craindre que le choc et le frottement de la pointe contre le cylindre n'altèrent la marche du chronomètre ([1]).

Diapason chronographique. — Le vrai moyen d'opérer consiste à mesurer le temps par le nombre de vibrations d'un étalon inscrivant ses vibrations propres, tandis que le corps étudié inscrit conjointement les siennes. Cette méthode d'estimer le temps, base de la

([1]) On évite cette cause d'erreur en employant un signal actionné électriquement par une horloge astronomique; et ce signal vient alors se joindre utilement au tracé du diapason chronographique (346).

chronographie, est due à Thomas Toung ([1]), qui se servait à cet effet d'une tige vibrante munie d'un style. Duhamel ([2]) appliqua la méthode à l'étude des vibrations des cordes ; Wertheim ([3]), le premier, l'employa à déterminer le nombre des vibrations d'un son à l'aide d'un diapason de tonalité connue. La figure 21 représente un compteur graphique, disposé pour l'enregistrement simultané des vibrations d'une corde AB et d'un diapason D. PQ est une tige qui, sous l'action d'une pédale adaptée à sa partie inférieure, pousse une

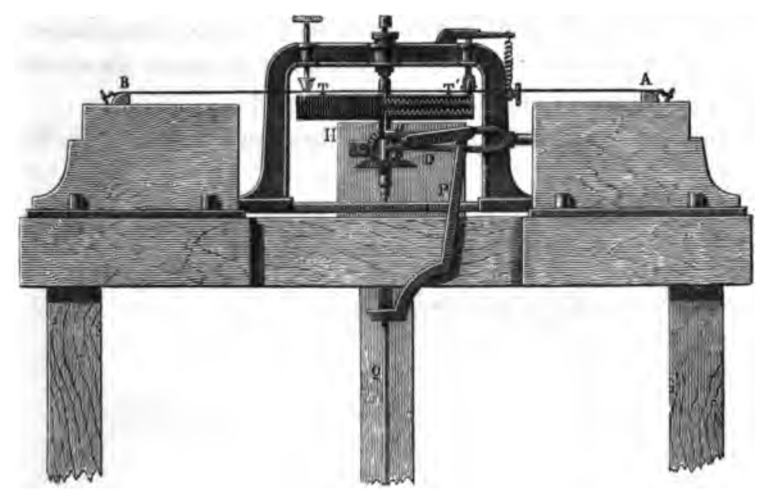


Fig. 21

pièce de bois a entre les deux branches du diapason, les écarte violemment, et met l'instrument en vibration. Un style, porté par le diapason, marque alors une ligne sinueuse sur le tambour noirci TT'; un deuxième style, fixé au milieu de la corde, trace une deuxième ligne à peu de distance de la première. Le rapport des nombres de sinuosités des deux courbes entre deux génératrices déterminées du cylindre donnera le rapport des nombres de vibrations effectuées dans un même temps par la corde et par le diapason. On en conclura sans peine le nombre absolu des vibrations de la corde

([1]) Young, *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts*, I, 191 ; 1807.
([2]) Duhamel, C. R., XI, 15, 810 et 957 ; 1841.
([3]) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XII, 385 ; 1844.

pendant une seconde, la tonalité du diapason étant connue. Ici le tambour TT′ est mis en mouvement par un mécanisme d'horlogerie H. Mais, la mesure, d'après la méthode, étant ramenée à la détermination du rapport des nombres de sinuosités des deux courbes comprises entre deux génératrices du cylindre, peu importe que le mouvement cylindrique soit uniforme. On pourra sans inconvénient adopter la disposition de la figure 20, et faire tourner le cylindre simplement à la main.

Il est à peine besoin de remarquer que la méthode graphique fait connaître non seulement le nombre, mais encore l'amplitude et la forme des vibrations ; elle fournit ainsi sur la nature du son étudié des renseignements authentiques et complets.

Si l'on observe de cette manière la vibration d'un diapason ébranlé

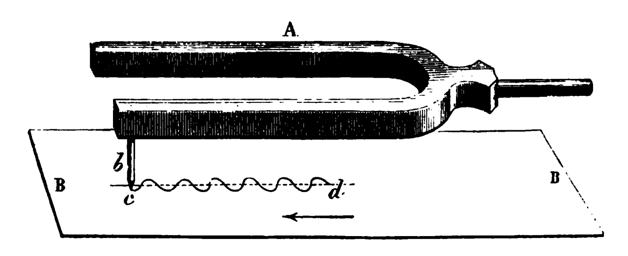


Fig. 22

par percussion, on constate que la courbe tracée est une sinusoïde exacte. Les branches du diapason sont donc animées d'un mouvement pendulaire, ce que confirmera la méthode optique.

Tel est encore sensiblement le mouvement d'une corde dérangée légèrement de sa position d'équilibre et abandonnée ensuite à la seule action des forces moléculaires.

Après la corde ou le diapason, l'inscription directe du mouvement vibratoire n'offre aucune difficulté ; il n'en est pas toujours ainsi. Lorsque par exemple on voudra inscrire les vibrations d'un tuyau sonore, on devra d'abord les recueillir sur un corps capable à la fois de les épouser et d'en tracer le graphique.

Phonautoscope. — Pour cet objet, Scott [1] employait une membrane placée au foyer d'un vaste cornet parabolique A, et suscep-

[1] Scott, *Reports of British Association;* 1859.

tible d'être tendue plus ou moins fortement à l'aide d'un cadre mobile D l'appuyant contre le bord du cornet. Kœnig ajouta une glissière G, montée sur une vis V et munie elle-même d'une vis V par laquelle on peut exercer telle pression que l'on veut en tel point que l'on choisit de manière que la membrane vibre aisément sous l'influence du son produit à l'entrée du cornet. Un style, formé d'une soie de porc garnie à son extrémité d'une barbe de plume, et fixé à la membrane par une goutte de cire, inscrit en les

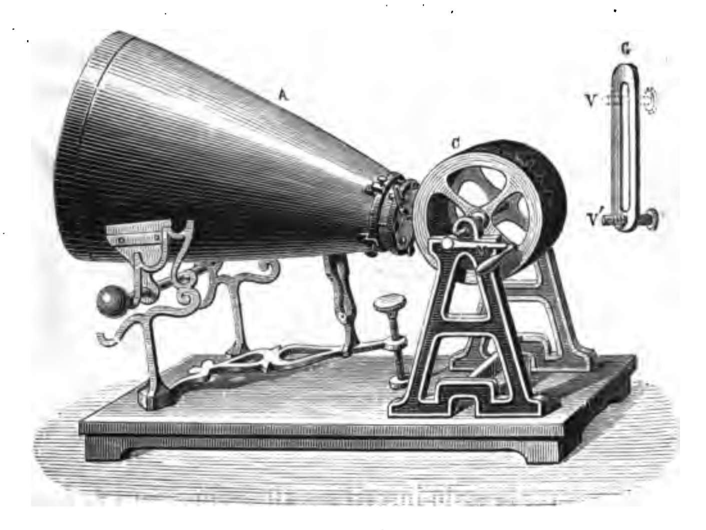


Fig. 23

amplifiant les vibrations sur le cylindre C que l'on fait tourner à la main avec une manivelle M. Cet appareil a été d'un bon usage pour l'étude de diverses questions d'acoustique, bien qu'il fût loin de répondre aux espérances de l'inventeur qui pensait y trouver le moyen d'enregistrer la parole d'un orateur. Un son quelconque ne peut en effet s'imposer à une membrane déterminée qu'à la condition d'avoir une intensité exceptionnelle : la membrane ne vibre habituellement que sous l'influence des sons voisins du son spécial pour lequel elle est réglée, et alors la vibration propre de la membrane tend à donner au tracé l'aspect d'une sinussoïde presque absolument régulière.

Phonographe. — Cependant Edison (¹) n'eut qu'à modifier légè-

(¹) Edison, *Nature;* 1877.

rement l'instrument pour en faire le phonographe, qui permet non seulement d'enregistrer la parole (1), mais de la reproduire ensuite un temps quelconque après l'émission. A cet effet, il a remplacé le papier enfumé par une feuille d'étain tendue sur un cylindre C au-dessus d'une rainure creusée dans le métal, suivant une hélice de même pas que la vis A'; il a substitué à la barbe de plume un style métallique très court, implanté dans un ressort *a* qui l'appuie sur la membrane *m* à l'aide de deux bouts de tube de caoutchouc servant d'étouffoirs; il a enfin constitué la membrane par une mince plaque de tôle, placée au fond d'une embouchure E. L'appareil étant ajusté, si l'on parle en regard de la plaque, en même temps qu'on

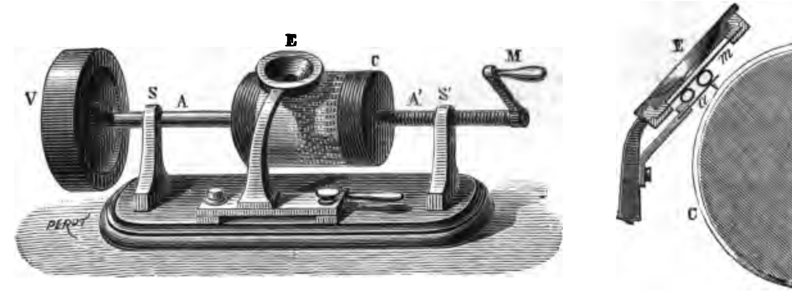


Fig. 24

tourne le cylindre, le style inscrit ses vibrations sous la forme d'un gaufrage qui en conserve tous les détails. Pour reproduire ensuite le son ainsi gravé, il suffit d'écarter le style, de ramener le cylindre au point de départ, de remettre toutes choses en place, et de recommencer le mouvement de rotation dans le sens direct. Le style est alors alternativement soulevé et abaissé par les gaufrages qui se succèdent au-dessous de lui, et la membrane reprend la série des mouvements qu'elle avait reçus de la voix : le son renaît le même — à supposer que la vitesse de rotation ait été exactement reproduite (2) — bien qu'affaibli (3) et nasillard.

(1) En 1864, Barlow présenta à la Société royale de Londres un *logographe*, donnant sur une bande de papier sans fin le tracé à l'encre des sons émis devant une embouchure fermée par une membrane, comme dans l'appareil de Scott.

(2) C'est pour assurer autant que possible la régularité du mouvement que l'on a disposé sur l'extrémité A de l'axe un lourd volant V.

(3) On atténue ce défaut en plaçant sur l'embouchure un cornet destiné à renforcer le son.

332. Limites des sons perceptibles. — Un mouvement vibratoire périodique frappant notre oreille n'entraîne pas nécessairement une perception sonore. Pour être entendu de nous, un son doit être compris entre certaines limites.

La limite inférieure ne semble pas différer beaucoup de 16. C'est le nombre de vibrations que donne le tuyau le plus grave des grandes orgues ; et encore, d'après M. von Helmholtz (¹), le son fondamental d'un tel tuyau ne se perçoit-il plus guère que comme une suite de secousses isolées : la sensation sonore n'apparaîtrait qu'à environ 30 vibrations. Savart (²) avait fixé beaucoup plus bas la limite des sons graves. Il employait à cet effet un appareil connu encore aujourd'hui sous le nom de *barre tournante de Savart*. C'était une barre AB montée sur le grand banc de Savart (fig. 12), à la place de la roue dentée, et pouvant par conséquent recevoir un mouvement de rotation plus ou moins rapide. A chaque demi-révolution, la barre passe à travers une fente rectangulaire CDEF dont elle rase les bords, et produit un bruit d'une intensité assourdissante. Les explosions sont d'abord distinctes quand le mouvement de rotation est très lent ; dès qu'il y a sept ou huit passages à la seconde, le son devient parfaitement continu, en même temps qu'il présente une force et une gravité remarquables. D'après cette expérience, la limite inférieure semblerait donc être 8. Mais Despretz montra qu'en plaçant sur le trajet de la barre une deuxième fente, ce qui doublait le nombre des passages en un même temps, on ne modifiait pas la hauteur du son : ce n'était donc pas le son produit par les 8 chocs que l'on entendait, mais l'un de ces sons supérieurs qui accompagnent presque nécessairement tout son musical, surtout quand celui-ci est dû à des secousses isolées, de durée très courte en comparaison de la période entière de la vibration. Pour éviter l'influence de ces sons supérieurs, il faut prendre des sons aussi simples que possible, par exemple ceux que donnent un tuyau bouché ou une corde chargée d'un disque en son milieu (von Helmholtz) ; mais alors on obtient difficilement une grande intensité, et à ce point de vue les conditions sont moins favorables que dans l'expérience de Savart où, en raison de l'intensité consi-

(¹) Von HELMHOLTZ, *loc. cit.*, p. 222.
(²) SAVART, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLVII, 69 ; 1821.

dérable du son produit, il n'est pas impossible que ce soit simplement le premier de ces sons supérieurs, le son 16, que l'on entende, avec une seule fente comme avec deux.

La limite supérieure est encore plus difficile à fixer. Despretz (¹), en se servant de diapasons accordés à l'oreille par Marloye suivant les octaves successives, est arrivé à entendre un *ré* ^{10} (²) d'environ 38 000 vibrations (³). Ce nombre, contesté par divers observateurs, a été admis par M. von Helmholtz. D'ailleurs, Wollaston a constaté

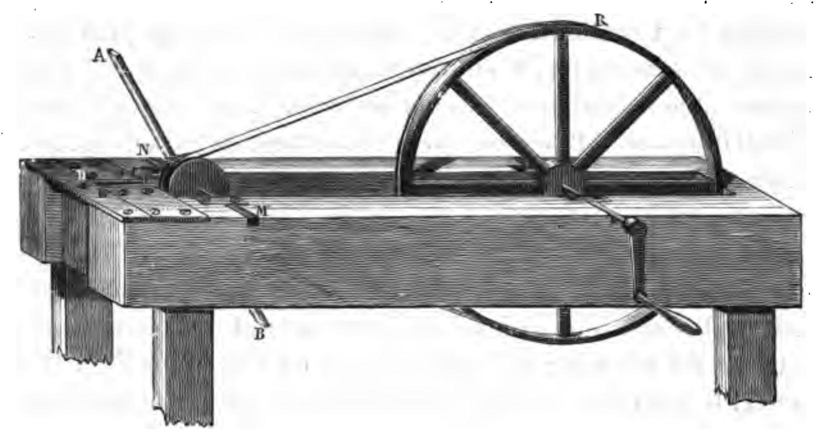


Fig. 25

que bien des personnes n'entendent pas la stridulation aiguë des grillons ni même parfois le pépiement des moineaux. La limite varie donc avec les oreilles.

En résumé, les limites extrêmes des sons perceptibles peuvent être fixées à 16 et 38 000 vibrations doubles par seconde, embrassant un intervalle d'environ 11 octaves.

(¹) Despretz, C. R., 1477 ; 1845.

(²) Afin de distinguer les différentes octaves, on les affecte d'indices, ainsi qu'il sera expliqué plus loin.

(³) Pour produire des sons très élevés, on peut encore se servir de cylindres de verre ou d'acier, que l'on fait vibrer longitudinalement ou transversalement. Savart a trouvé par ce procédé 25 000, et Kœnig seulement 20 000 comme limite supérieure. M. Hagenbach fait une jolie expérience à ce sujet : une flamme sensible, convenablement réglée (voir plus loin), étant placée à distance, on attaque avec l'archet successivement les cylindres de Kœnig, par ordre de taille décroissante ; chaque fois la flamme répond, et elle s'agite encore vivement alors que l'oreille placée tout près du dernier cylindre n'entend plus rien.

L'espace comprenant les sons musicaux est beaucoup plus restreint. Si nous laissons de côté l'*ut*-$_2$ de 16 vibrations, donné par les plus longs tuyaux d'orgue (le trente-deux pieds ouvert, ou le seize pieds bouché), le son le plus grave utilisé par les musiciens est le *la*-$_2$ de 27 vibrations des nouveaux pianos à queue. Le son le plus bas des instruments d'orchestre est le *mi*-$_1$ de la contrebasse avec 41 vibrations. Les grands pianos montent jusqu'au la_6 de 3 500 vibrations, et parfois jusqu'à l'ut_7 de 4 200 vibrations. On n'emploie que tout à fait exceptionnellement des notes plus élevées, dont l'extrême paraît être le re_7 de la petite flûte avec 4 700 vibrations par seconde. Les sons d'un bon usage en musique sont en réalité compris entre 30 et 4 000 vibrations dans un intervalle de 7 octaves.

CHAPITRE II

INTERVALLES MUSICAUX

333. Intervalles musicaux. — Bien que, d'après ce qui précède, les limites des sons musicaux soient assez resserrées, il s'en faut encore de beaucoup que tous les sons compris entre ces limites puissent être employés conjointement. Chez tous les peuples et à toutes les époques, dans la mélodie la plus simple comme dans l'harmonie la plus compliquée, les sons procèdent par intervalles déterminés et non d'une façon continue. Cette variation du son par degrés est aussi essentielle que le rythme à la nature même de la musique.

L'observation nous apprend en outre ce fait, que pour le moment nous nous bornons à constater sans chercher à l'expliquer : qu'il s'agisse de deux sons successifs (mélodie) ou simultanés (harmonie), l'oreille n'admet que les combinaisons où le rapport des nombres des vibrations est un nombre simple. Ce rapport définit l'*intervalle* des deux sons d'une façon complètement indépendante de leur hauteur absolue.

A l'unité correspond l'*unisson*.

Le rapport le plus simple ensuite est 2 ; c'est l'*octave ;* octave aiguë si le nombre des vibrations est double, octave grave s'il est moitié,

Vient ensuite le nombre 3, caractérisant la *douzième*, ou *quinte de l'octave ;* puis le nombre 4, définissant la *double octave ;* et ainsi de suite.

Cette série 1, 2, 3, 4, 5, ... constitue ce que l'on nomme la *série harmonique ;* et les sons 2, 3, 4, 5, ... s'appellent les *harmoniques* (1) successifs du son 1.

(1) Les Allemands les nomment *tons supérieurs* ou *hypertons*, et cette appellation est peut-être plus convenable, tous les termes de la série n'étant pas vraiment en harmonie avec le son 1.

334. Intervalles consonnants. — Si l'on se borne aux intervalles compris dans l'espace d'une octave, l'application de la loi posée plus haut nous conduit aux intervalles suivants :

$\frac{1}{1}$ unisson,	$\frac{5}{4}$ tierce majeure,
$\frac{2}{1}$ octave,	$\frac{6}{5}$ tierce mineure,
$\frac{3}{2}$ quinte,	$\frac{5}{3}$ sixte majeure,
$\frac{4}{3}$ quarte,	$\frac{8}{5}$ sixte mineure.

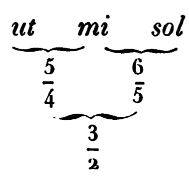
Cette dernière est la limite des consonances, limite qui n'a rien d'absolu. Mathématiquement, il n'y a pas de critérium indiquant où finissent les nombres simples; et, pratiquement, il n'y a pas de séparation tranchée entre les intervalles consonnants et les intervalles dissonants considérés isolément. C'est en réalité de la structure de la gamme que dépend cette séparation. Ainsi en même temps que les sept modes mélodiques des Grecs se réduisaient à nos deux gammes, majeure et mineure, la tierce, d'abord rangée parmi les dissonances, était admise au moyen âge comme consonnance imparfaite, mais on l'excluait encore de l'accord final, où plus tard elle fut introduite sous la forme majeure, tandis que l'on n'employa régulièrement la tierce mineure que vers le milieu du siècle dernier, afin de distinguer nettement le mode faible. L'adoption de la sixte mineure est également toute récente. Sur la plupart des instruments, l'intervalle de septième naturelle $\frac{7}{4}$ sonne au moins aussi bien que la sixte mineure; et cependant les intervalles formés avec le nombre 7 ne sont pas acceptés des musiciens. Cela tient moins à ce que le nombre 7 est trop grand (on en admet de plus grands) qu'à ce fait qu'il est premier, et se trouve ainsi complètement en dehors des autres intervalles de notre gamme. Il y a entre les derniers intervalles consonnants caractérisés par le nombre 5, c'est-à-dire les tierces et les sixtes, et les intervalles dissonants marqués par les nombres supérieurs, mais divisibles par 2, 3 ou 5, tels que la

seconde majeure, une véritable lacune formée par le nombre 7 (¹).

Les intervalles dissonants ont d'ailleurs leur raison d'être en ce qu'ils servent de contraste et de préparation aux consonnances. Leur importance s'accroît chaque jour dans la musique moderne, qui ne craint pas de retarder le repos consonnant.

335. Accords. — La règle relative à l'association de deux sons s'étend aux combinaisons de plusieurs sons, ou *accords*. Pour qu'un accord formé de trois sons, ou davantage, soit consonnant, il faut que non seulement les intervalles des différents sons au son fondamental, mais encore les intervalles respectifs de ces sons entre eux soient exprimés par des nombres simples. Sinon, l'harmonie de l'accord sera troublée par quelque dissonance.

Le type des accords consonnants de trois notes est l'*accord parfait majeur*



constitué, comme on le voit, par deux tierces superposées, l'une majeure, l'autre mineure, donnant la quinte.

L'*accord parfait mineur*

ut *mi♭* *sol*

$\frac{6}{5}$ $\frac{5}{4}$

$\frac{3}{2}$

présente les mêmes intervalles, mais groupés autrement, la tierce mineure en bas. Cette interversion ne suffirait pas à expliquer la

(¹) Sans doute ce n'est pas chose impossible que le septième harmonique se crée une place en musique. Il est plus étrange que désagréable; et son étrangeté même vient plutôt de notre défaut d'habitude que de sa nature propre. Mais son emploi régulier ne pourrait s'introduire que par une révolution complète du système actuel (Voir Blaserna, *Le son et la musique*, p. 78. Paris, Germer-Baillière; 1879).

différence profonde des deux accords, si elle n'entraînait dans l'accord mineur un certain trouble, comme nous le verrons plus loin (389).

Les seuls accords consonnants de trois notes dans une octave sont

ut	*mi*	*sol*	*ut*	*mi♭*	*sol*
ut	*fa*	*la*	*ut*	*fa*	*la♭*
ut	*mi♭*	*la♭*	*ut*	*mi*	*la*

ou, si l'on écrit au lieu de *ut fa la* et de *ut fa la♭*, sol_{-1} *ut mi* et sol_{-1} *ut mi♭*, et au lieu de *ut mi♭ la♭* et de *ut mi la*, *mi sol* ut_2 et *mi♭ sol* ut_2 (ce qui permet de regarder également les *accords de sixte et de quarte*, et ceux *de sixte et de tierce* comme des renversements des accords fondamentaux, où d'un côté la quinte aurait été baissée, de l'autre la note basse aurait été haussée d'une octave),

ut	*mi*	*sol*			*ut*	*mi♭*	*sol*		
	mi	*sol*	ut_2			*mi♭*	*sol*	ut_2	
		sol	ut_2	mi_2			*sol*	ut_2	*mi♭*$_2$

ou

4	5	6			10	12	15		
	5	6	8			12	15	20	
		3	4	5			15	20	24

336. Gamme. — La *gamme* est la série des sons compris dans une octave et procédant suivant les intervalles admis.

Gamme diatonique. — Notre gamme actuelle se compose de sept notes (sans compter l'octave), qui sont définies par les nombres suivants, exprimant leurs rapports respectifs à la tonique :

ut	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	ut_2 (¹)
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

ou en nombres entiers,

24 27 30 32 36 40 45 48.

(¹) Ces noms des notes de la gamme ont été introduits, au onzième siècle,

Outre les intervalles consonnants définis plus haut, *tierce majeure* $\frac{5}{4}$, *quarte* $\frac{4}{3}$, *quinte* $\frac{3}{2}$, *sixte* $\frac{5}{3}$ et *octave* 2, dont les noms viennent, comme l'on voit, de leur place dans la gamme, nous y trouvons les intervalles dissonants de *seconde majeure* $\frac{9}{8}$ et de *septième majeure* $\frac{15}{9}$.

Toute cette gamme n'est que l'évolution de l'accord parfait majeur: l'accord qui a pour *tonique ut* donne le *mi* et le *sol*; si l'on part de la *dominante sol*, on trouve le *si* et le *ré*; si au contraire on forme un accord se terminant à l'*ut*, on obtient le *fa* et le *la*.

Les rapports des notes deux à deux, ou leurs intervalles successifs, sont :

ut – *ré*	*ré* – *mi*	*mi* – *fa*	*fa* – *sol*	*sol* – *la*	*la* – *si*	*si* – *ut*
$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

par le bénédictin Gui d'Arezzo, qui prit pour chaque note la première syllabe de chacun des vers du commencement de l'hymne à saint Jean : UT queant laxis REsonare fibris MIra gestorum FAmuli tuorum, SOLve polluti LAbii reatum, Sancte Ioannes.

Anciennement les notes étaient désignées par les premières lettres de l'alphabet, les différentes octaves s'écrivant comme il suit :

ABCDEFG abcdefg aabbcc.....

En tête de cette série on ajouta plus tard une note que l'on désigna par Γ, d'où le nom de *gamme* donné à l'échelle musicale. La désignation par lettres est encore usitée en Allemagne et en Angleterre :

Notation française.......	*ut*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*
— allemande......	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*
— anglaise........	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*

Pour distinguer les différentes octaves, nous employons simplement des indices. Dans la notation par lettres, on utilise les indices avec les majuscules et les accents avec les minuscules :

ut_{-2}	ut_{-1}	ut_1	ut_2	ut_3	ut_4	ut_5	ut_6	ut_7
C_2	C_1	C	c	c'	c''	c'''	c	c^{v},

le *la* du diapason étant $la_3 = a'$.

Ils forment trois catégories : les *tons entiers majeurs* $\frac{9}{8}$; les *tons entiers mineurs* $\frac{10}{9}$; et les *demi-tons majeurs* $\frac{16}{15}$.

On désigne ces derniers sous le nom de majeurs, pour les distinguer d'un autre intervalle, le *demi-ton mineur* $\frac{25}{42}$, que nous apprendrons bientôt à connaître.

Le ton entier mineur peut être considéré comme formé de la succession d'un demi-ton majeur et d'un demi-ton mineur; on a en effet

$$\frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{10}{9},$$

et la somme de deux intervalles s'exprime par leur produit, comme un intervalle s'exprime par un quotient.

La distance d'un ton entier majeur à un ton entier mineur est $\frac{81}{80}$. Cet intervalle s'appelle un *comma*. Si on le néglige, on peut dire que la gamme est constituée par la succession de deux tons entiers, un demi-ton, trois tons entiers et un demi-ton. C'est notre gamme majeure, dérivée de la gamme de Pythagore.

Gamme pythagoricienne. — Les degrés de cette gamme étaient définis par les rapports suivants, qui ne renferment que les facteurs 2 et 3 :

ut	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*ut*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2;

ou

1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2,

en d'autres termes, la gamme pythagoricienne procédait uniquement par quintes. Avait-on adopté cette échelle comme un moyen d'accorder facilement les cordes de la lyre, ou se rattachait-elle à ces harmonies des nombres auxquelles Pythagore avait été initié par les prêtres égyptiens ? Quelle qu'en soit la véritable origine, le principe, simple en apparence, conduisait, pour certains rapports, à des nombres très compliqués. Sans parler de la septième qui, n'étant guère qu'une note de passage, peut sans inconvénient être rapprochée de la tonique, la tierce et la sixte présentent une

complication qui les rend impropres à l'harmonie [1]. Les intervalles pythagoriciens seraient au contraire, d'après MM. Cornu et Mercadier [2], les véritables intervalles de la mélodie.

Pour déterminer la valeur exacte d'un intervalle mélodique ou harmonique, ils l'ont fait exécuter sur un violon, au cours d'une mélodie, ou en harmonie (deux cordes étant accordées ensemble à l'intervalle voulu), et ils ont inscrit successivement les deux notes par un dispositif très ingénieux. Sous le chevalet de l'instrument ils placent une petite lame de laiton mince L, adaptée à l'une des extrémités d'un long fil métallique, soutenu librement dans des bagues de caoutchouc. L'autre extrémité de ce fil est soudée à une lame de clinquant c, pincée dans un lourd support S. A cette lame est attachée par un peu de cire une barbe de plume b qui appuie sur un cylindre métallique M, recouvert d'un papier enfumé. Quand on fait parler une corde, ses vibrations se transmettent au chevalet, à la lame métallique, au fil, et enfin à la barbe de plume qui vibre

[1] Cette imperfection de la tierce et de la sixte a sans doute pour beaucoup empêché le développement de la musique harmonique chez les Grecs. La substitution de la tierce harmonique $\frac{5}{4}$ à la tierce discordante $\frac{81}{64}=\frac{5}{4}\cdot\frac{81}{80}$ a été sans contredit le progrès le plus important de notre gamme. Déjà au IVe siècle avant J.-C., Archytas donne la vraie valeur $\frac{5}{4}$ de la tierce majeure consonnante dans le mode enharmonique. Didyme, au Ier siècle de notre ère, l'introduit dans le trétrachorde diatonique qu'il divise ainsi

$$\underbrace{si \quad ut}_{\frac{16}{15}}\ \underbrace{\quad ré}_{\frac{10}{9}}\ \underbrace{\quad mi}_{\frac{9}{8}}.$$

Ptolémée dispose autrement ce tétrachorde qu'il appelle syntonique

$$\underbrace{si \quad ut}_{\frac{16}{15}}\ \underbrace{\quad ré}_{\frac{9}{8}}\ \underbrace{\quad mi}_{\frac{10}{9}}.$$

A part l'incertitude sur son partage entre les deux espèces de ton entier, la tierce majeure *ut* : *mi* s'y trouve avec la même valeur $\frac{9}{8}\times\frac{10}{9}=\frac{5}{4}$. Mais les Grecs n'ont pas utilisé cet intervalle comme consonnance. On a commencé au moyen âge à en faire une consonnance imparfaite. Notre gamme ne date réellement que de la fin du XVIe siècle (Zarlin).

[2] CORNU et MERCADIER, C. R., 1869-72.

synchroniquement et inscrit sur le cylindre les oscillations de la corde à côté de celles d'un diapason chronographe D. MM. Cornu et Mercadier ont ainsi trouvé les intervalles harmoniques toujours d'accord avec les valeurs de notre gamme actuelle, tandis que les

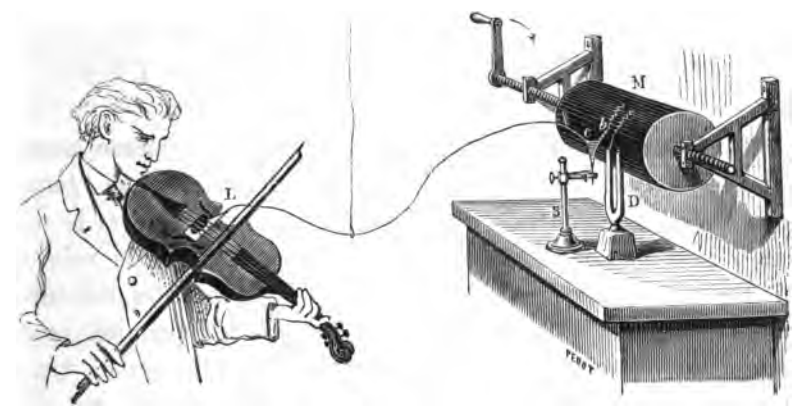


Fig. 26

intervalles mélodiques étaient ceux de la gamme pythagoricienne.

Les intervalles successifs des notes dans la gamme de Pythagore sont :

ut ré mi fa sol la si ut

$$\frac{9}{8}\quad\frac{9}{8}\quad\frac{256}{243}\quad\frac{9}{8}\quad\frac{9}{8}\quad\frac{9}{8}\quad\frac{256}{243}$$

Les tons entiers sont tous égaux entre eux et à notre ton entier majeur; les demi-tons, petits et compliqués, occupent les mêmes places que dans notre gamme ordinaire.

Gamme mineure. — La musique actuelle admet une deuxième gamme, caractérisée par la tierce mineure, et appelée en conséquence *gamme mineure.* Elle est composée des rapports suivants :

$$1\quad\frac{9}{8}\quad\frac{6}{5}\quad\frac{4}{3}\quad\frac{3}{2}\quad\frac{8}{5}\quad\frac{9}{5}\quad 2,$$

dont les intervalles successifs,

$$\frac{9}{8}\quad\frac{16}{15}\quad\frac{10}{9}\quad\frac{9}{8}\quad\frac{16}{15}\quad\frac{9}{8}\quad\frac{10}{9},$$

sont les mêmes que dans la gamme majeure, mais autrement distribués.

En appelant T et T' les deux tons entiers et *t* le ton entier mineur, on a en effet :

Gamme majeure....... T T' *t* T T' T *t*
Gamme mineure....... T *t* T' T *t* T T' [1].

337. Changements de tons. — Dans notre système harmonique, la *tonique* a pris une place prépondérante. De là l'importance des changements de ton, non seulement pour placer le morceau à une hauteur convenant à l'instrument ou à la voix qui doit l'exécuter, mais encore pour mettre à profit les ressources que l'on trouve à quitter, puis à reprendre le ton primitif (*modulation*). En ce qui concerne la voix, les changements de ton ne présentent pas de difficulté : on peut toujours chanter un morceau à partir d'une note quelconque, les intervalles ne dépendant pas de la hauteur absolue des sons. Mais, sur la plupart des instruments, la transposition ne peut pas s'effectuer d'une façon aussi simple. Considérons par exemple un instrument à sons fixes, accordé naturellement sur notre échelle musicale actuelle, et supposons que l'on veuille y jouer la gamme majeure en partant d'un *sol*. On aura sur l'instrument :

sol *la* *si* *ut* *ré* *mi* *fa* *sol*
T' T *t* T T' *t* T ,

c'est-à-dire (abstraction faite des deux sortes de ton entier au début) la série même des tons et des demi-tons caractéristiques de la gamme majeure, à cela près que le dernier demi-ton se place à l'avant-dernier rang au lieu d'être au dernier. Pour rétablir l'ordre pri-

[1] Telle est du moins la forme de la gamme descendante. En montant, on emploie de préférence la série

T *t* T' T T' T *t*,

composée de la première moitié de la gamme mineure et de la deuxième moitié de la gamme majeure.

mitif (au comma près), il suffira de hausser le *fa* d'un demi-ton mineur ou de le diéser, *diéser* signifiant multiplier par $\frac{25}{24}$, et par suite *bémoliser* multiplier par $\frac{24}{25}$ (1). Si l'on veut reproduire exactement l'intervalle *si-ut*, il faut tirer le *fa*♯ du *sol* en abaissant celui-ci d'un demi-ton majeur; c'est la règle de Delezenne : pour diéser une note on multiplie par $\frac{15}{16}$ celle qui la suit dans l'ordre diatonique, pour la bémoliser on multiplie par $\frac{16}{15}$ celle qui la précède. L'école Galin-Paris-Chevé, qui professe la gamme de Pythagore, suit la même règle : seulement, comme le demi-ton pythagoricien est $\frac{256}{243}$, on dièse une note en abaissant la note immédiatement supérieure dans le rapport $\frac{243}{256}$ et on la bémolise en élevant de $\frac{256}{243}$; celle qui précède entre deux notes consécutives de la gamme, le dièse est alors plus aigu que le bémol, position admise par la plupart des solfèges publiés de nos jours.

338. Tempérament. — Quelque système que l'on adopte, on ne saurait introduire tous ces dièses et bémols dans un instrument à sons fixes. De cette impossibilité est né le *tempérament*. Après avoir essayé à plusieurs reprises de se contenter d'intervalles approximativement justes, de façon à pouvoir identifier les sons peu différents, on est arrivé à la *gamme tempérée* actuelle, dans laquelle l'octave est partagée en douze intervalles égaux entre eux et égaux par conséquent à $\sqrt[12]{2} = 1,05946$. Cet intervalle est pris pour demi-ton; chaque ton entier est regardé comme formé de deux demi-tons; et le dièse d'une note est supposé identique au bémol de la note immédiatement supérieure, ainsi que le montre le tableau suivant, dans lequel la colonne A contient les dièses et bémols suivant la vieille règle d'Aristoxène, encore généralement adoptée il y a cinquante ans, la colonne D, les notes modifiées suivant Delezenne (dans l'intervalle d'un ton entier

(1) Dans la notation allemande, le dièse s'indique par *is* et le bémol par *es*, l'*e* se supprimant par euphonie après une voyelle : ainsi *ut* ♯ = *Cis*, *ré* ♭ = *Des* et *la*♭ = *As*.

mineur, les deux règles concordent); la colonne C, les notes d'après Chevé :

	GAMME DE PTOLÉMÉE.		GAMME TEMPÉRÉE.	GAMME DE PYTHAGORE.	
	A	D		C	
ut	$1 = 1,00000$		$2^{\frac{0}{12}} = 1,00000$	$1 = 1,0000$	*ut*
ut #	$\frac{25}{24} = 1,04167$	$\frac{135}{128} = 1,05469$	$2^{\frac{1}{12}} = 1,05946$	$\frac{256}{243} = 1,05350$	*ré* ♭
ré ♭	$\frac{27}{25} = 1,08000$	$\frac{16}{15} = 1,06667$		$\frac{2187}{2048} = 1,06787$	*ut* #
ré	$\frac{9}{8} = 1,12500$		$2^{\frac{2}{12}} = 1,12246$	$\frac{9}{8} = 1,12500$	*ré*
ré #	$\frac{75}{64} = 1,17187$		$2^{\frac{3}{12}} = 1,18921$	$\frac{32}{27} = 1,18519$	*mi* ♭
mi ♭	$\frac{6}{5} = 1,20000$			$\frac{19683}{16384} = 1,20136$	*ré* #
mi	$\frac{5}{4} = 1,25000$		$2^{\frac{4}{12}} = 1,25992$	$\frac{81}{64} = 1,26563$	*mi*
fa	$\frac{4}{3} = 1,33333$		$2^{\frac{5}{12}} = 1,33484$	$\frac{4}{3} = 1,33333$	*fa*
fa #	$\frac{25}{18} = 1,38889$	$\frac{45}{32} = 1,40625$	$2^{\frac{6}{12}} = 1,41421$	$\frac{1024}{729} = 1,40467$	*sol* ♭
sol ♭	$\frac{36}{25} = 1,44000$	$\frac{64}{45} = 1,42222$		$\frac{729}{512} = 1,42383$	*fa* #
sol	$\frac{3}{2} = 1,50000$		$2^{\frac{7}{12}} = 1,49831$	$\frac{3}{2} = 1,50000$	*sol*
sol #	$\frac{25}{16} = 1,56250$		$2^{\frac{8}{12}} = 1,58740$	$\frac{128}{81} = 1,58024$	*la* ♭
la ♭	$\frac{8}{5} = 1,60000$			$\frac{6561}{4096} = 1,60181$	*sol* #
la	$\frac{5}{3} = 1,66667$		$2^{\frac{9}{12}} = 1,68179$	$\frac{27}{16} = 1,68750$	*la*
la #	$\frac{125}{72} = 1,73611$	$\frac{225}{128} = 1,75781$	$2^{\frac{10}{12}} = 1,78180$	$\frac{16}{9} = 1,77778$	*si* ♭
si ♭	$\frac{9}{5} = 1,80000$	$\frac{19}{9} = 1,77778$		$\frac{59049}{32768} = 1,80202$	*la* #
si	$\frac{15}{8} = 1,87500$		$2^{\frac{11}{12}} = 1,80775$	$\frac{243}{128} = 1,89844$	*si*
ut	$2 = 2,00000$		$2^{\frac{11}{12}} = 2,00000$	$2 = 2,00000$	*ut*

Aucun intervalle n'est respecté. L'altération la plus grave porte sur la tierce, dont la différence avec la tierce naturelle s'élève à $\frac{1}{126}$, quantité qui n'est nullement négligeable : on s'en convaincra si l'on remarque que, dans la gamme moyenne du piano, le *mi* est par le fait du tempérament surélevé de 2,5 vibrations ([1]), tandis que, dans la même gamme, la différence entre la tierce majeure et la tierce mineure, différence suffisante pour changer complètement le caractère d'un morceau, ne monte qu'à 13 vibrations.

339. Diapason normal. — Les valeurs relatives des différentes notes de la gamme étant déterminées, et les gammes procédant par octaves successives, il suffit, pour fixer tous les sons, d'arrêter la valeur absolue de l'un d'eux.

Le son sur lequel se règlent tous les autres est le *la* du diapason, ou la_3.

Jadis ce repère n'était rien moins que fixe. Des mesures de Sauveur, les plus anciennes que l'on ait sur cet objet, il résulte qu'en 1700 le ton ordinaire de l'orgue et du clavecin, à Paris, était de 405 vibrations doubles par seconde. Pendant le dix-huitième siècle, les déterminations oscillent entre 410 et 425. En 1833, Scheibler trouvait, à Paris seulement : à l'Opéra, deux diapasons de 426,5 et 434, aux Italiens et au Conservatoire deux autres de 435 et 440,5. Quelques années plus tard, ces diapasons avaient encore monté ; et, en 1857, Lissajous mesurait à l'Opéra 448. Pour arrêter cette progression désordonnée, un décret en date du 16 février 1859 a fixé, en France, le *la* du diapason à 435 vibrations par seconde ([2]).

La gamme naturelle réglée sur ce *la* est

ut_3	$ré_3$	mi_3	fa_3	sol_3	la_3	si_3	ut_4
261	293,625	326,25	348	391,5	435	489,375	522

([1]) La tierce pythagoricienne est alors trop haute de 4 vibrations.

([2]) Sauveur puis Chladni avaient pris pour point de départ un ut_3 de 256 vibrations, avec lequel chaque *ut* est une puissance de 2, et qui est encore fréquemment employé par les acousticiens : le la_3 vaut alors 426,66. En Allemagne, depuis la réunion de Stuttgard en 1834, on suit le *la* de Scheibler, battant 440 vibrations, nombre peu différent de celui du *la* français, mais plus commode pour les calculs. En Angleterre, le diapason est d'environ un demi-ton plus haut que chez nous.

et les octaves successives sont :

ut_{-2}	16,3125	ut_4	522
ut_{-1}	32,625	ut_5	1044
ut_1	65,25	ut_6	2088
ut_2	130,5	ut_7	4176
ut_3	261		

Au moyen de ces nombres et des intervalles fixés plus haut, on pourra aisément calculer le nombre de vibrations d'un son quelconque.

340. Logarithmes acoustiques. — Pour tous ces calculs, les intervalles étant des quotients, l'emploi des logarithmes est naturellement indiqué. Nous donnerons donc ci-dessous la table des principaux *logarithmes acoustiques* (on nomme ainsi les logarithmes des différents intervalles musicaux).

Intervalles.		Logarithmes acoustiques.	Intervalles.		Logarithmes acoustiques.
Unisson	1	0,000 0000	Tierce majeure	$\frac{5}{4}$	0,096 9100
Comma	$\frac{81}{80}$	0,005 3950	Quarte	$\frac{4}{3}$	0,124 9387
Demi-ton mineur	$\frac{25}{24}$	0,017 7288	Quinte	$\frac{3}{2}$	0,176 0913
Demi-ton tempéré	$\sqrt[12]{2}$	0,025 0858	Sixte mineure	$\frac{8}{5}$	0,204 1200
Demi-ton majeur	$\frac{16}{15}$	0,028 0287	Sixte majeure	$\frac{5}{3}$	0,221 8488
Ton entier mineur	$\frac{10}{9}$	0,045 7575	Septième mineure	$\frac{9}{5}$	0,255 2725
Ton entier majeur	$\frac{9}{8}$	0,051 1525	Septième majeure	$\frac{15}{8}$	0,273 0013
Tierce mineure	$\frac{6}{5}$	0,079 1812	Octave	2	0,301 0300

Le logarithme de 2 différant peu de 0,300, si on multiplie tous les logarithmes précédents par 2000, on aura les valeurs très approchées des divers intervalles en six-centièmes d'octaves, c'est-à-dire en centièmes de ton. En retranchant de chaque produit le $\frac{1}{300}$

de ce produit même, on trouvera le nombre exact (à moins d'une unité). On obtiendra ainsi immédiatement les valeurs, en centièmes de tons, des intervalles ci-dessus mentionnés :

Unisson	0	Tierce majeure	193
Comma	11	Quarte	249
Demi-ton mineur	35	Quinte	351
Demi-ton tempéré	50	Sixte mineure	407
Demi-ton majeur	56	Sixte majeure	442
Ton entier mineur	91	Septième mineure	509
Ton entier majeur	102	Septième majeure	544
Tierce mineure	158	Octave	600

CHAPITRE III

PROPAGATION DU SON

341. Propagation du mouvement vibratoire dans un milieu élastique. — Quand un ébranlement quelconque est produit en une certaine région d'un milieu élastique, cet ébranlement se communique de proche en proche jusqu'aux parties les plus éloignées.

Un exemple vulgaire de ce fait, exemple déjà signalé par les stoïciens, se présente dans les rides excitées à la surface de l'eau par une pierre qu'on y lance : autour du point frappé se forme une dépression, suivie bientôt d'un relèvement ; puis vallée et montagne se propagent à la surface de l'eau sous l'aspect d'une ride circulaire dont le rayon s'accroît progressivement. Si en même temps on observe quelque objet léger, un brin de paille, flottant à la surface liquide, on le voit au passage de l'onde s'abaisser un instant, puis se soulever, retomber ensuite, sans éprouver d'ailleurs de translation sensible. Ce n'est donc pas l'eau qui se déplace, c'est le mouvement qui progresse, en se transmettant à de nouvelles molécules, tandis que celles qu'il animait auparavant reviennent au repos.

342. Ondes liquides. — D'après les frères Ernest-Henri et Guillaume Weber [1] qui ont fait une étude expérimentale approfondie des ondes liquides, la trajectoire la plus ordinaire d'une molécule y est un cercle. Supposons, pour fixer les idées, que chaque molécule décrive uniformément un tour entier pendant que le mouvement se propage de la molécule o à la molécule 12. Au bout

[1] E.-H. et W. Weber, *Wellenlehre auf Experimente gegründet*. Leipzig; 1825.

d'un quart de période, la molécule o est arrivée au point le plus bas de sa course, à l'extrémité inférieure du diamètre vertical, les molécules 1 et 2 ont exécuté respectivement $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$ de tour, tandis que les molécules 3 à 12 sont encore immobiles. Après une

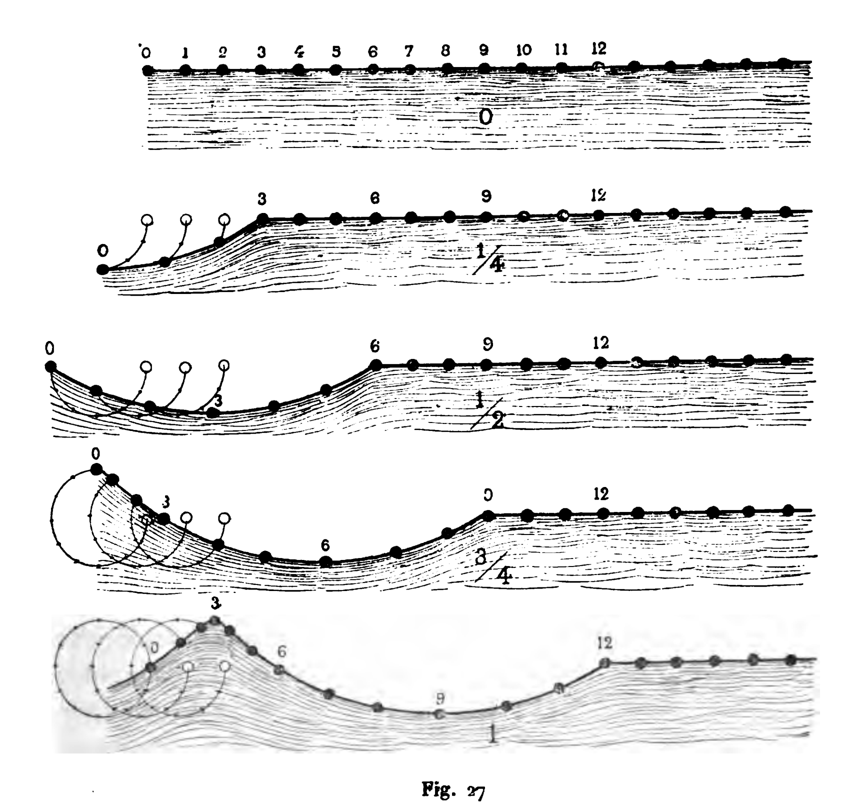


Fig. 27

demi-période, quand le front de l'onde atteint la molécule 6, la molécule o est revenue à son niveau primitif, mais à l'extrémité du diamètre horizontal opposée à son point de départ : l'élongation dans le sens horizontal est alors à son maximum ; les molécules 1 et 2 remontent après avoir décrit les $\frac{5}{12}$ et les $\frac{4}{12}$ de la circonférence ; les molécules 3, 4 et 5, qui ont parcouru les $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$ de leur orbite, sont actuellement dans la situation même où se trouvaient après un quart de période les molécules o, 1 et 2. Une vallée s'est

ainsi dessinée à la surface de l'eau. Une montagne va suivre : une pente a déjà surgi après trois quarts de période ; l'autre versant s'ajoute dans le dernier quart ; et au bout d'une période entière, l'onde est complètement formée et s'étend de o à 12. Elle va se propager ensuite, en présentant toujours le val avec ses molécules écartées et le mont avec ses molécules pressées.

Imaginons maintenant qu'après ce premier tour, la molécule o continue à se mouvoir régulièrement sur son orbite : à la suite de

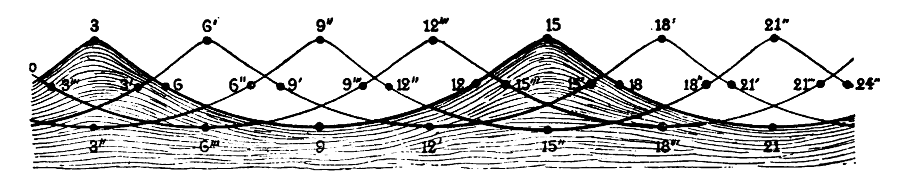


Fig. 28

la première onde vont cheminer d'autres ondes identiques, ainsi que l'indique la figure 28 [1].

343. Vibrations longitudinales ; vibrations transversales. — De circulaire qu'elle était, la trajectoire d'une molécule peut devenir elliptique. Elle peut même se réduire à une droite verticale, sur laquelle la molécule se déplace comme se déplaçait sur le diamètre la projection du mobile décrivant un cercle. La montagne devient alors exactement l'inverse de la vallée : le profil de l'onde se compose de deux arcs symétriques de sinussoïde. Quand la direction de la vibration est ainsi perpendiculaire au sens de la propagation du mouvement, la vibration est dite *transversale*. Telles sont, par exemple, celles des cordes d'un violon. La propagation des vibrations transversales s'observe aisément sur une corde élastique et faiblement tendue, de plusieurs mètres de longueur (tube de caoutchouc [2])

(1) Le phénomène est en réalité très complexe. Quand un groupe d'ondes se propage sur une eau tranquille, on voit les ondes avancer à l'intérieur du groupe et venir mourir en tête ; la vitesse du groupe est donc moindre que celle des ondes constituantes. M. Boussinesq, lord Rayleigh et M. Gouy ont publié d'intéressantes recherches sur ce sujet.

(2) Ce sera par exemple un tube de caoutchouc tombant librement du plafond sous l'effort de son propre poids, que l'on aura, s'il le faut, augmenté en remplissant de sable le canal intérieur.

ou spirale de laiton), fixée à un bout et tenue à la main par l'autre bout. Si l'on déplace vivement la main dans un sens perpendiculaire à la direction de la corde, l'ébranlement parcourt la corde entière sous la forme d'une onde nettement visible ; et si l'on imprime avec la main des secousses convenablement rythmées, on voit une série d'ondulations se transmettre très régulièrement jusqu'à l'extrémité la plus éloignée. Ici encore il est bien évident que ce qui se propage c'est le mouvement, tandis que chaque molécule n'éprouve qu'un déplacement transversal.

Au lieu de s'effectuer perpendiculairement à la direction de la propagation, le déplacement des molécules vibrantes peut se produire dans le sens même de la propagation. Tel est le cas de certaines vibrations sonores cheminant dans les solides et de toutes celles qui se propagent dans les liquides et les gaz. C'est assez dire l'importance considérable des vibrations *longitudinales* en acoustique.

344. Propagation d'un ébranlement longitudinal dans un cylindre élastique. — L'expérience de Mariotte avec les sept billes d'ivoire (191) montre d'une manière saisissante le mode

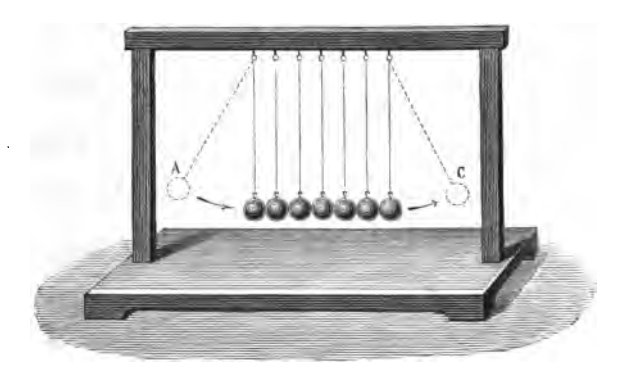


Fig. 29

de propagation d'un ébranlement longitudinal dans un milieu élastique, chaque bille recevant toute la vitesse de la bille précédente, qui rentre désormais au repos, puis transmettant cette même vitesse à la bille suivante : le mouvement progresse ainsi uniformément et sans rétrograder.

Soit une colonne cylindrique d'un milieu élastique quelconque. Un ébranlement a été produit dans une certaine région, les molécules d'une même section orthogonale ayant reçu des déplacements égaux et des vitesses égales parallèlement à l'axe du cylindre, les déplacements et les vitesses variant d'ailleurs d'une section à l'autre suivant une loi quelconque dans toute l'étendue de la région considérée. Les forces élastiques qui résultent du déplacement des molécules directement ébranlées, déterminent le déplacement des molécules voisines, d'où naissent de nouvelles forces élastiques qui déplacent les molécules plus éloignées ; et l'ébranlement se propage dans la colonne, toutes les molécules situées dans une même section orthogonale prenant à la fois le même mouvement parallèle à l'axe du cylindre.

Un plan M, situé à la distance x de l'origine, est venu à l'époque t en M', à la distance $x+u$. Un plan infiniment voisin M_1,

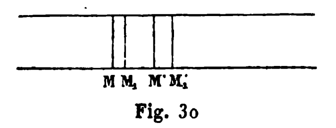


Fig. 30

situé au début à la distance $x+dx$, est venu en M'_1, à la distance $x+dx+u+\frac{du}{dx}dx$. La distance des deux plans, qui était dx, est devenue $dx\left(1+\frac{du}{dx}\right)$. Ainsi $\frac{du}{dx}$ est la variation de l'unité de longueur parallèlement à l'axe du cylindre ; ou, la section n'ayant pas changé, si l'on considère la variation de volume, $-\frac{du}{dx}$ est la *condensation* γ.

Par suite de l'écartement des deux plans $M'M'_1$, il s'est développé entre eux une force élastique proportionnelle à la déformation (135), valant en conséquence $E\frac{du}{dx}$ par unité de surface. Cette force élastique étant égale et de signe contraire à celle qui a produit la déformation, celle-ci aura pour expression $-E\frac{du}{dx}$, le signe $-$ indiquant que la force appliquée au plan M est dirigée vers la gauche. Sur un plan N, situé à la distance $x+\delta x$, agit

de même une force extérieure, dirigée vers la droite, et égale à $E\left(\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\delta x\right)$. Sur la tranche MN s'exerce donc, dans le sens

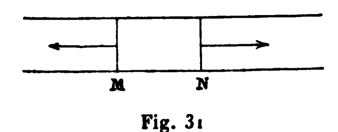


Fig. 31

des x positifs, par unité de surface, une force $E\frac{d^2u}{dx^2}\delta x$. D'autre part, la force agissante, étant égale au produit de la masse par l'accélération, a pour expression $\delta x.D.\frac{d^2u}{dt^2}$, si l'on désigne par D la densité du milieu.

On a donc

$$D\frac{d^2u}{dt^2}=E\frac{d^2u}{dx^2},$$

ou, en posant $a^2=\frac{E}{D}$,

$$\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Cette équation, que nous retrouverons dans l'étude des cordes vibrantes, a pour intégrale générale, donnée pour la première fois par d'Alembert,

$$u=f(x+at)+F(x-at),$$

f et F étant deux fonctions arbitraires.

On en déduit pour la vitesse v et la condensation γ, en un point quelconque x du cylindre et à une époque quelconque t,

$$v=\frac{du}{dt}=af'(x+at)-aF'(x-at),$$

et

$$\gamma=-\frac{du}{dx}=-f'(x+at)-F'(x-at).$$

Les fonctions f' et F' sont définies par les conditions initiales. Les

vitesses et les condensations étant données à l'époque $t=0$ dans toute l'étendue de l'ébranlement initial, les quantités

$$v_0=af'(x)-aF'(x)=\varphi(x)$$

et

$$\gamma_0=-f'(x)-F'(x)=-\psi(x)$$

sont des fonctions connues de x; les fonctions f' et F' sont donc déterminées :

$$f'(x)=\frac{\varphi(x)+a\psi(x)}{2a},$$

et

$$F'(x)=\frac{-\varphi(x)+a\psi(x)}{2a}.$$

On en conclut

$$v=\frac{1}{2}\Big[\varphi(x+at)+a\psi(x+at)+\varphi(x-at)-a\psi(x-at)\Big],$$

$$\gamma=-\frac{1}{2a}\Big[\varphi(x+at)+a\psi(x+at)-\varphi(x-at)+a\psi(x-at)\Big].$$

Ces équations résolvent complètement la question.

Supposons l'ébranlement initial limité entre les deux sections $x=0$ et $x=l$. Alors les fonctions φ et ψ sont nulles pour toute valeur de la variable plus petite que o et plus grande que l.

Nous partagerons l'étendue du cylindre en trois régions :

1° Considérons d'abord un point situé du côté des x positifs au delà de l. Dans un tel point, les termes $\varphi(x+at)$ et $\psi(x+at)$ sont toujours nuls ; les expressions générales de la vitesse et de la condensation se réduisent donc à

$$v=\frac{1}{2}\Big[\varphi(x-at)-a\psi(x-at)\Big]$$

et

$$\gamma=\frac{1}{2a}\Big[\varphi(x-at)-a\psi(x-at)\Big].$$

Il en résulte entre la vitesse et la condensation la relation remarquable

$$v=a\gamma.$$

Mais, pour que ces quantités v et γ ne soient pas nulles, il faut que l'on ait

$$l > x - at > 0,$$

ou

$$\frac{x-l}{a} < t < \frac{x}{a}.$$

Ainsi, le point x demeure au repos jusqu'à l'époque $\frac{x-l}{a}$, il entre alors en mouvement pour retomber au repos à l'époque $\frac{x}{a}$, tandis que l'ébranlement se propage au delà, en restant semblable à lui-même puisque la variable $x - at$ présente en chaque point la même série de valeurs de l à o. A une époque t, les seuls points en mouvement sont ceux qui se trouvent compris entre les deux tranches pour lesquelles on a $x - at = l$ et $x - at = 0$. Une onde de longueur l se propage dans le sens des x positifs avec la vitesse constante

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}}.$$

Il est à remarquer que cette vitesse est indépendante de la forme de l'onde, ou de la loi de l'ébranlement initial.

2° Du côté des x négatifs, de o à $-\infty$, les termes $\varphi(x-at)$ et $\psi(x-at)$ étant toujours nuls, la vitesse et la condensation ont pour expressions

$$v = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + a\psi(x+at)\right],$$

et

$$\gamma = -\frac{1}{2a}\left[\varphi(x+at) + a\psi(x+at)\right];$$

par suite

$$v = -a\gamma.$$

On retrouve entre la vitesse et la condensation le même rapport constant, au signe près; et l'on reconnaîtrait aisément que le mouvement se propage du côté des x négatifs avec la même vitesse a, en restant encore à chaque instant enfermé dans une onde de longueur l, mais en présentant dans cette onde des vitesses et

des condensations différentes de celles de la première onde.

3° Dans la région enfin où s'est produit l'ébranlement initial, entre les plans $x = o$ et $x = l$, l'état d'un point à chaque instant est celui qui résulterait de la superposition des vitesses et des condensations afférentes aux deux ondes dans la position qu'elles occuperaient à cet instant ([1]).

Si, au lieu d'un ébranlement unique, on considère un mouvement vibratoire périodique entretenu par une cause quelconque dans une région déterminée du cylindre, en substituant à ce mouvement une série d'ébranlements élémentaires on verra sans peine que le mouvement vibratoire originel donne naissance à deux mouvements vibratoires de même période, se propageant en sens opposé avec la même vitesse a.

Suivons l'un de ces mouvements; et, pour fixer les idées, imaginons que l'impulsion initiale provienne de l'une des branches d'un diapason placé en face de l'ouverture O d'un long tuyau cylindrique d'axe OX. Supposons qu'au début cette branche se trouve à son plus grand éloignement de l'origine du tuyau : elle va d'abord s'en rapprocher en poussant la tranche d'air adjacente et lui communiquant successivement toute la série des vitesses qu'elle prend elle-même. Cette première tranche, déplacée et comprimée, agira sur une deuxième, qui se comportera de même avec une troisième, et ainsi de suite, les impulsions se transmettant uniformément d'une tranche à la suivante, de sorte que les états élémentaires originels équidistants dans le temps se retrouveront à un même instant équidistants dans l'espace.

Pour représenter l'état de l'air dans chaque tranche, nous porterons en abscisse la distance de cette tranche à l'origine, et en ordonnée la vitesse comptée positivement dans le sens de la propagation du mouvement et négativement en sens contraire. Nous

([1]) Des deux ondes de même longueur mais de conditions différentes, qui se propagent ainsi en sens inverse avec la même vitesse a, il peut arriver que l'une fasse défaut. Il suffit pour cela qu'entre les vitesses et les condensations initiales existe le rapport $\pm a$. En effet, la condition $v = a\gamma$, par exemple, entraîne la nullité de la fonction f; par suite $\varphi(x) = -a\psi(x)$; l'expression de la vitesse se réduit à $v = -a\psi(x - at)$; et comme pour toute valeur négative de la variable la fonction ψ est nulle, de pareilles valeurs rendront toujours la vitesse nulle. La première onde existera seule.

aurons alors, après 1/4, 1/2, 1 période, les trois courbes ci-contre où se voient éparpillées sur toute la longueur de la colonne trou-

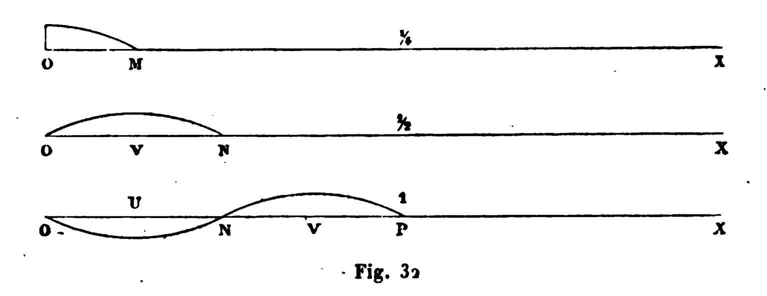


Fig. 32

blée les vitesses qui ont successivement animé la tranche originelle pendant la durée de 1/4, 1/2, 1 vibration. On appelle *longueur de l'onde* la distance OP à laquelle le mouvement se transmet pendant la durée d'une vibration.

Les mêmes courbes peuvent être considérées comme représentant les condensations, proportionnelles aux vitesses. Soit par exemple la dernière courbe, relative à l'onde entière : à partir du front P de l'onde, la condensation croît comme la vitesse, jusqu'à une distance PV égale au quart de la longueur d'onde ; vitesse et condensation vont ensuite en décroissant et s'annulent ensemble au milieu N de l'onde ; puis les vitesses reprennent des valeurs égales et contraires à celles qu'elles ont affectées sur la première moitié de l'onde, tandis que des dilatations reproduisent en sens inverse la série des condensations antérieures.

Le mouvement vibratoire continuant à l'origine, tandis que cette première onde se propagera d'un mouvement uniforme, de nouvelles ondes marcheront à sa suite avec la même vitesse a ; et à un instant quelconque l'état de l'air dans le tuyau sera figuré par une

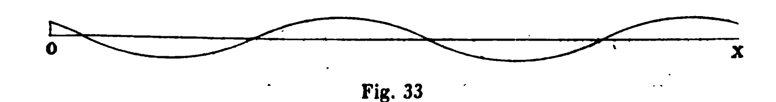


Fig. 33

série d'arcs égaux, alternativement positifs et négatifs, l'ordonnée à l'origine représentant l'état actuel de la tranche directement actionnée par le diapason.

345. Vitesse du son dans l'air. — *Vitesse dans un tuyau.* La formule

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}} \text{ [1]}$$

est générale.

Appliquons-la d'abord à la détermination de la vitesse de propagation d'un ébranlement dans une colonne cylindrique d'air ou de tout autre gaz suffisamment éloigné de son point de liquéfaction. La condensation γ étant toujours supposée très petite, si l'on regarde les changements de pression du gaz, dans ses condensations et dilatations successives, comme régis par la loi de Mariotte,

$$pv = C^{te},$$

on aura pour l'accroissement de pression correspondant à la condensation γ

$$dp = -\frac{p\,dv}{v} = p\gamma.$$

Mais

$$E = \frac{dp}{\gamma}.$$

Donc

$$a = \sqrt{\frac{p}{D}}. \qquad \textit{(formule de Newton)}$$

Dans cette formule p et D représentent, évaluées en unités mécaniques, la pression et la densité actuelles de la colonne gazeuse. On a donc

$$p = gmh,$$

et

$$D = \delta \frac{h}{H} \frac{1}{1 + \alpha t},$$

en appelant

g l'accélération due à la pesanteur (à Paris 981),

h la hauteur barométrique, en centimètres,

(1) E désigne le rapport de l'accroissement de pression dp à la condensation correspondante γ. On a donc encore, $D\gamma$ étant l'accroissement de la densité dD,

$$a = \sqrt{\frac{dp}{dD}}.$$

H la hauteur barométrique normale, 76,
m la densité (masse de l'unité de volume) du mercure,
δ la densité du gaz à zéro et sous la pression 76,
α le coefficient de dilatation du gaz,
t la température.

Par suite

$$a = \sqrt{gH\frac{m}{\delta}(1+\alpha t)}.$$

valeur indépendante de h.

Effectuons le calcul pour l'air, en remarquant que $\frac{m}{\delta} = \frac{13,596}{0,001293}$; nous trouvons

$$a = 280^m\sqrt{1+\alpha t}.$$

Cette valeur est inférieure de $\frac{1}{6}$ à celle que fournit l'expérience.

La cause de ce désaccord ne fut découverte qu'en 1816 par Laplace. Il fit observer qu'en raison de la mauvaise conductibilité des gaz et de la rapidité de la propagation du son, la chaleur développée dans une couche par le fait de sa condensation ne peut pas se répandre immédiatement dans la masse entière; on ne saurait donc appliquer ici la loi de Mariotte, qui suppose la température constante. Si au contraire la chaleur reste entièrement localisée dans la couche où elle s'est produite, le phénomène est régi par la formule de Poisson

$$pv^{\frac{C}{c}} = C^{te},$$

$\frac{C}{c}$ étant le rapport de la chaleur spécifique du gaz sous pression constante à sa chaleur spécifique à volume constant.

On a alors

$$dp = \frac{C}{c}\frac{p\,dv}{v}$$

et par suite

$$a = \sqrt{\frac{p}{D}\frac{C}{c}}. \qquad \textit{(formule de Laplace)}$$

Le nombre de Newton doit donc être multiplié par $\sqrt{\frac{C}{c}}$, soit pour l'air sensiblement $\sqrt{1,41}$ ou $1,1874$, ce qui rétablit l'accord ($280.1,1874 = 332,4$).

Malgré cet accord, on peut se demander si l'hypothèse de Laplace est réellement exacte. En fait, n'y a-t-il point quelque portion de la chaleur produite qui échappe par conduction ou par rayonnement [1], et par suite la vitesse réelle dans l'air n'est-elle pas inférieure à cette vitesse théorique? Stokes [2] a montré que l'hypothèse de Newton et celle de Laplace sont les deux seules dans lesquelles la dilatation succède à la compression sans dépense de travail. Hors de ces deux cas, en quelque sorte extrêmes, le cycle complet d'une dilatation et d'une compression ne peut être parcouru qu'avec consommation d'une certaine quantité d'énergie : le son devrait alors s'éteindre à tel court délai que ne nous offre nullement la nature. Les deux hypothèses précédentes sont donc les seules admissibles.

D'ailleurs la formule de Laplace, comme celle de Newton, donne pour la vitesse du son un nombre constant, indépendant et de la hauteur du son et de la pression barométrique au lieu de l'expérience.

Il importe de remarquer, après Regnault, que tous ces calculs ne conviennent qu'à des ébranlements très petits. Quand la condensation et la variation de pression ne pourront plus être considérées comme des différentielles, le changement de pression $p' - p$ correspondant à la variation de volume $v' - v$ devra se calculer par la formule

$$p' - p = p\,\frac{v^{\frac{C}{c}} - v'^{\frac{C}{c}}}{v'^{\frac{C}{c}}},$$

[1] Dans un milieu donné, la rapidité des alternatives de condensation et de dilatation règlera seule le phénomène. Au-dessous d'une certaine lenteur, la température aura le temps de s'égaliser, l'hypothèse de Newton sera la vraie ; au-dessus d'une certaine rapidité, la chaleur restera confinée au lieu où elle sera produite, la formule de Laplace donnera la vitesse. La question est donc de savoir si la rapidité des vibrations sonores est suffisante pour déterminer dans l'air cette localisation absolue (voir lord Rayleigh, *Theory of sound*, II, 23 ; 1878).

[2] Stokes, *Phil. mag.*, (4), I, 305 ; 1851.

ou, si l'on pose toujours $v' = v\,(1 - \gamma)$,

$$p' - p = p\left[(1-\gamma)^{-\frac{C}{c}} - 1\right],$$
$$= p\left[\frac{C}{c}\gamma + \frac{\frac{C}{c}\left(\frac{C}{c}+1\right)}{1.2}\gamma^2 + \dots\right],$$

d'où

$$E = p\frac{C}{c} + p\frac{\frac{C}{c}\left(\frac{C}{c}+1\right)}{1.2}\gamma + \dots$$

L'élasticité du gaz n'est donc pas constante, comme nous l'avons supposé jusqu'ici : elle croît avec γ, et il en est de même par conséquent de la vitesse du son. La vitesse du son est plus grande pour les fortes intensités ; et c'est seulement pour les ébranlements infiniment petits qu'elle est constante et égale à

$$a = \sqrt{\frac{p}{D}\frac{C}{c}}.$$

Même vitesse dans l'air libre. — Tous les raisonnements qui précèdent s'appliquent à la propagation du son dans l'air libre, avec cette seule différence que l'intensité du son s'affaiblit selon la distance, tandis que dans un tuyau cylindrique dont les parois n'auraient pas d'autre effet sur la masse gazeuse que de la limiter,

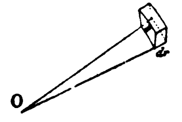


Fig. 34

l'ébranlement se propagerait sans altération, et par suite l'intensité du son resterait constante à une distance quelconque ([1]). Soit en effet, dans un milieu isotrope indéfini, un ébranlement circonscrit au

([1]) De fait, la diminution d'intensité dans les tuyaux cylindriques est faible, et l'on emploie couramment des *tubes acoustiques* pour transmettre la voix à d'assez grandes distances.

début à l'intérieur d'une petite sphère de rayon ε et se propageant ensuite dans toutes les directions. Considérons, à la distance r du centre d'ébranlement, une tranche sphérique d'épaisseur δr : les pressions sur les deux bases ω et ω' de cette tranche auront pour expression

$$-\omega E \frac{du}{dr} \quad \text{et} \quad \omega' E \left(\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2}\delta r\right),$$

et la force agissante sera

$$F = \omega' E \left(\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2}\delta r\right) - \omega E \frac{du}{dr}.$$

Mais

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(r+\delta r)^2}{r^2},$$

d'où

$$\omega' = \omega\left(1 + 2\frac{\delta r}{r}\right).$$

D'ailleurs

$$F = \omega \delta r . D . \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{a^2}{r}\left(2\frac{du}{dr} + r\frac{d^2u}{dr^2}\right).$$

Si l'on pose $u = \frac{\upsilon}{r}$, il vient

$$\frac{d^2\upsilon}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\upsilon}{dr^2},$$

équation identique à celle que nous avons trouvée plus haut. On a donc

$$\upsilon = f(x+at) + F(x-at),$$

et par suite

$$u = \frac{1}{r}\Big[f(x+at) + F(x-at)\Big].$$

Ainsi le mouvement se propage en tous sens avec la même vitesse a que dans un cylindre indéfini, tandis que sur un rayon donné la vitesse de chaque molécule varie en raison inverse de la distance au centre.

Par suite, la force vive du mouvement en un point est en raison inverse du carré de la distance de ce point au centre ; et comme cette force vive mesure l'intensité, on voit que l'intensité du son dans un milieu indéfini varie en raison inverse du carré de la distance.

Cette proposition est évidente géométriquement : la même quantité d'énergie se répartissant sur des surfaces sphériques qui

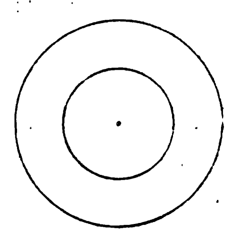


Fig. 35

vont en croissant comme les carrés de leurs rayons, la portion reçue par une même étendue de chacune de ces surfaces est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre.

346. Déterminations expérimentales. — *Premières mesures.* — Les anciens avaient déjà remarqué que le son se propage dans l'air avec une certaine lenteur ([1]). Les premières déterminations numériques sont dues au P. Mersenne ([2]). Bien qu'il ait posé assez nettement les conditions du problème, Mersenne n'effectua lui-même que des mesures grossières : d'après le temps écoulé entre

([1]) Cædere si quem
Ancipiti videas ferro procul arboris auctum,
Ante fit ut cernas ictum quam plaga per auris
Det sonitum ; sic fulgorem quoque cernimus ante
Quam tonitrum accipimus.....
(LUCRÈCE, *De rerum natura*, V.1)

([2]) MERSENNE, *loc. cit.*, *De arte ballistica*, prop. 39. On attribue souvent la première détermination de la vitesse du son dans l'air à Gassend (vulg. Gassendi), qui, d'après Musschenbrœk (*Introductio ad philosophiam naturalem*, II, 920, § 2236. Lugd. Batav. ; 1762), aurait trouvé pour cette vitesse 1473 pieds (478 mètres). Mais dans son ouvrage posthume (GASSENDI *opera omnia*, I, Physicæ sectio I, lib. VI, cap. X : De sono. Lugduni, Anisson et Devenet ; 1658), après avoir déclaré que l'impulsion se transporte dans l'espace avec la même vitesse, que le son vienne d'un canon ou d'un mousquet, Gassend rapporte simplement le nombre de Mersenne.

les instants où il percevait la lumière et ensuite le bruit d'une arme à feu éloignée, il estima la vitesse du son dans l'air à 1380 pieds (448 mètres) par seconde. Un peu plus tard (1656), les physiciens florentins Borelli et Viviani (¹), par la même méthode employée avec plus de soin, obtinrent un nombre plus approché, 1077 pieds (350 mètres).

Après que Newton eut donné la formule de la vitesse de propagation du son, les déterminations expérimentales se succédèrent rapidement :

Boyle (²)	1126ᵖ	(366ᵐ)
Cassini (Dom.), Huyghens, Picard, Römer (³)	1097	(356)
Flamstead et Halley (⁴)	1071	(348)
Derham (⁵)	1071	(348)

Sauf peut-être celles de Derham qui découvrit l'influence du vent sur la vitesse de propagation du son, ces mesures, et d'autres que j'omets, ne firent avancer en rien la question, dont les difficultés n'étaient pas encore exactement saisies.

Expériences des Académiciens de Paris (⁶). — En 1738, l'Académie des Sciences nomma une Commission composée de Cassini de Thury, Lacaille et Maraldi, à l'effet de déterminer la vitesse du son. On choisit pour stations la pyramide de Montmartre, l'Observatoire de Paris, le moulin de Fontenay-aux-Roses, le château de Lay, la tour de Montlhéry et parfois le clocher de Dammartin. Des pièces de canon, de 12 et de 8 livres de balles, installées sur les hauteurs de Montmartre et de Montlhéry, tiraient alternativement toutes les demi-heures. Les observateurs placés aux diverses stations notaient le temps écoulé entre la perception du feu et celle du bruit; la lumière se transmet avec une telle rapidité que l'on pouvait sans

(¹) Borelli et Viviani, dans les *Saggi di sperienze fatte nell' Accademia del Cimento*, chap. xi.

(²) Boyle, d'après Poggendorff, *Histoire de la physique* (éd. fr.), p. 483.

(³) Cassini, Picard, Rœmer, *Regiæ scientiarum academiæ historia*, lib. II, sect. 3, cap. II; ann. 1677.

(⁴) Flamstead et Halley, *Phil. Trans.*, 1708 et 1709.

(⁵) Derham, *Phil. Trans.*; 1708.

(⁶) Cassini de Thury, *Mémoires de l'Académie des sciences;* année 1738.

erreur sensible regarder ce temps comme étant celui que le son avait réellement mis à franchir la distance parcourue.

Voici, par exemple, le détail d'une série d'expériences, celle du 14 mars 1738, le vent étant très faible et perpendiculaire à la direction de la propagation.

« A 9^h30^m, le premier coup de canon tiré à Montmartre fut entendu à l'Observatoire 16^s, à Lay 36^s et à Montlhéry 1^m25^s après le feu. Le second coup de canon fut entendu à l'Observatoire 16^s 1/2, à Lay 36^s après la lumière; à Montlhéry, la grande foule de peuple qui était accourue empêcha d'en faire l'observation exactement. A 10^h0^m, le premier coup de canon tiré à Montlhéry, fut entendu à Lay 48^s et à l'Observatoire 1^m7^s 1/2 après la lumière; mais on ne put entendre le bruit à Montmartre, non plus que du second coup de canon qui fut entendu à Lay 48^s et à l'Observatoire un peu moins de 1^m8^s après la lumière. Suivant ces observations on trouve que depuis Montlhéry jusqu'à Lay, l'intervalle du temps entre le son et la lumière a été de 48^s; depuis Lay jusqu'à l'Observatoire, 20^s, et depuis l'Observatoire jusqu'à Montmartre 16^s 1/2, l'une portant l'autre. Et comme les quatre points dont il s'agit sont sensiblement en ligne droite, la somme 1^m24^s 1/2 doit être égale à la durée de la transmission directe de Montmartre à Montlhéry, et c'est précisément ce qui a lieu, puisque ce temps s'est trouvé égal à 1^m25^s. Cette observation est encore remarquable en ce que dans la même nuit on entendit à Paris le canon de Montlhéry et réciproquement. Or, si des causes quelconques avaient pu accélérer la propagation du son dans le premier de ces trajets, elles l'auraient retardé dans l'autre; en sorte que la moyenne des deux observations doit donner la vitesse exacte de propagation. »

Par un assez grand nombre d'expériences effectuées ainsi suivant la *méthode des coups réciproques*, on trouva que la vitesse de propagation du son était constante; et, à 6° environ, cette vitesse était de 173 toises ou 337 mètres à la seconde. Il en résulterait [1] pour la vitesse à zéro

$$a_0 = 332^m.$$

[1] Voir Le Roux, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XII, 345; 1867.

Ces expériences eurent un retentissement énorme. De tous côtés on se mit à l'œuvre [1] : Lacaille et Cassini à Aigues-Mortes, La Condamine à Quito et à Cayenne, Bianconi à Bologne, Kästner puis Müller à Gœttingue, Espinosa et Bauza à Santiago, Benzenberg à Düsseldorf, Goldingham à Madras, multiplièrent les mesures.

Bianconi montra l'influence de la température sur la vitesse du son ; le même fait ressort des travaux de La Condamine ; et Benzenberg, par des expériences instituées spécialement à cette fin, mit hors de doute l'accroissement de la vitesse avec la température, conformément à la théorie [2]. Mais toutes ces déterminations ne firent qu'accentuer la discordance entre la vitesse réelle et la valeur théorique résultant de la formule de Newton.

Expériences des membres du Bureau des Longitudes [3]. — Quand Laplace eut trouvé la véritable cause de cette discordance, et donné par le calcul une valeur d'accord avec l'observation, il demanda au Bureau des Longitudes de reprendre les mesures en usant des moyens perfectionnés dont on disposait, et en tenant compte de l'état thermométrique de l'atmosphère, trop négligé dans les expériences de 1738. Une Commission fut composée d'Arago, Bouvard, Mathieu et de Prony, auxquels s'adjoignirent Gay-Lussac et de Humboldt. La méthode employée fut encore celle des coups réciproques, mais on réduisit à 5 minutes les intervalles entre les coups des deux stations, et on remplaça les pendules imparfaites des premiers observateurs par d'excellents chronomètres de Breguet. Les stations choisies furent Villejuif et Montlhéry. On préféra raccourcir un peu la distance et ne pas introduire sur le trajet du son l'atmosphère troublée de Paris. A chaque station était une pièce de 6, servie par des artilleurs. On opéra la nuit et par le temps le plus calme. Les premières épreuves eurent lieu le 21 juin 1822. Par un phénomène singulier, tandis que tous les coups de Montlhéry furent entendus parfaitement à Villejuif, le bruit du canon de Villejuif fut à peine transmis à Montlhéry ; cependant sept

[1] Relativement à tous ces travaux, voir BRAVAIS et MARTINS, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XII, 5 ; 1845 ; et LE ROUX, *loc. cit.*

[2] Pour les températures atmosphériques l'accroissement de la vitesse est très sensiblement de $0^m,60$ par 1°.

[3] ARAGO, *Connaissance des temps* pour 1825, ou *Œuvres complètes*, édition Barral, XI, 1. Paris, Gide ; 1859.

coups différents y furent nettement perçus. En les combinant avec les coups correspondants observés à Villejuif, on a le tableau suivant :

Heure	Coup	Montlhéry			Villejuif		
10^h25^m	coup de 1^k				Arago...	55,0	54,8
					Mathieu..	54,8	
					Prony...	54,7	
10 30	— 1	Bouvard...		54,5			
		Gay-Lussac.					
		Humboldt..					
10 35	— 1,5				Arago...	55,0	55,0
					Mathieu..	55,2	
					Prony...	54,8	
10 40	— 1,5	Bouvard....	55,0	54,9			
		Gay-Lussac.	»				
		Humboldt..	54,9				
10 55	— 1,5				Arago...	54,9	54,8
					Mathieu..	55,0	
					Prony...	54,6	
11 00	— 1,5	Bouvard....	»	53,9			
		Gay-Lussac.	»				
		Humboldt..	53,9				
11 05	— 1				Arago...	54,6	54,7
					Mathieu..	55,0	
					Prony...	54,6	
11 10	— 1	Bouvard...	54,7	54,6			
		Gay-Lussac.	54,5				
		Humboldt..	»				
11 15	— 1,5				Arago...	55,0	54,9
					Mathieu..	55,0	
					Prony...	54,6	
11 20	— 1,5	Bouvard....		54,3			
		Gay-Lussac.					
		Humboldt..					
11 25	— 1				Arago...	54,8	54,8
					Mathieu..	54,9	
					Prony...	54,6	
11 30	— 1	Bouvard...		54,5			
		Gay-Lussac.					
		Humboldt..					
11 35	— 1,5				Arago...	54,8	54,8
					Mathieu..	54,9	
					Prony...	»	
11 40	— 1,5	Bouvard...	54,5	54,3			
		Gay-Lussac.	»				
		Humboldt..	54,1				
		Moyennes.....		54,4			54,8

En divisant la distance $18612^m,52$ par la durée moyenne de la

transmission 54ˢ,6, on trouve 340ᵐ,9 pour l'espace parcouru par le son à la température de 15°,9. D'après ces expériences, la vitesse du son dans l'air à zéro serait donc à très peu près

$$a_0 = 331^{m}.$$

Expériences de Moll et Van Beck [1]. — L'année suivante, Moll et Van Beck refirent ces expériences dans les landes d'Utrecht, entre les deux collines Zevenboompjes (les Sept-Arbres) et Kooljesberg, distantes de 17669ᵐ,3. A chaque station, un officier tenait la mèche allumée au-dessus de la lumière du canon ; un autre avait le chronomètre sous les yeux et tenait le bras du premier. Quand l'aiguille arrivait à la seconde convenue il poussait le bras qui tenait la mèche, et le canon partait. A l'autre station, un observateur muni d'un chronomètre en pressait le ressort au moment où il apercevait le feu et mettait ainsi l'aiguille en mouvement ; puis, à l'instant où il percevait le son, il retirait le pouce et alors l'aiguille s'arrêtait. L'intervalle des coups réciproques fut réduit à 1 seconde. Après plusieurs expériences infructueuses où le canon de l'une des stations n'était pas entendu à l'autre, on eut vingt-deux coups réciproques dans la soirée du 27 juin 1823 et quatorze dans celle du 28. Voici par exemple les temps observés entre l'éclair et le son aux deux stations dans cette dernière soirée.

	Au Zevenboompjes.	Au Kooltjesberg.	Moyennes.
	51ˢ,81	52'12	51,96
	51,94	52,10	52,02
	51,77	51,28	51,54
	51,98	52,51	52,24
	52,17	52,46	52,32
	52,15	52,28	52,21
	52,25	53,10	52,78
	52,18	50,17	51,17
	52,40	52,19	52,30
	52,27	52,62	52,44
	52,27	51,66	51,97
	52,23	51,52	51,87
	52,49	51,99	52,24
	52,56	51,60	52,08
Moyennes.	52,12	51,98	52,05

[1] MOLL et VAN BECK, *Pogg. Ann.*, V, 351 et 469 ; 1825.

Le résultat de toutes les mesures donna pour vitesse dans l'air sec, à zéro

$$a_0 = 332^m,8\ [1].$$

Peu après, Gregory fit à Woolwich, particulièrement en vue d'apprécier l'influence du vent, des expériences que nous ne rapporterons point, les coups n'ayant pas été réciproques, ni les distances assez grandes. En 1871, Stone effectua au Cap des expériences plus précises (en particulier, il ne commença à suivre le mouvement qu'au delà d'une certaine distance de façon à éviter l'influence des perturbation à l'origine) : il obtint un nombre ($332^m,4$) peu différent de celui de Moll et Van Beck.

De même que l'on avait mesuré la vitesse du son sous l'équateur, on la détermina près du pôle : le capitaine Parry dans ses voyages aux mers polaires en 1822 et 1824, le lieutenant Kendall pendant l'expédition de Franklin en 1825, l'observèrent par des froids de $-40°$ et la trouvèrent d'accord avec la valeur théorique pour ces basses températures.

D'autre part, les expériences de Stampfer et Myrbach (1823) dans le Tyrol, entre deux stations présentant une différence de niveau de 1364 mètres, et celles de Bravais et Martins (1844) en Suisse, entre le sommet et la base du Faulhorn, sur une hauteur verticale de 2079 mètres, confirmèrent ce résultat du calcul, que la vitesse de propagation du son dans l'air (qu'ils trouvèrent, les uns et les autres, égale à $332^m,4$) est indépendante de la pression du gaz.

Mais la méthode suivie dans toutes ces mesures présentait en elle-même une cause d'erreur tenant à l'appréciation par l'opérateur du temps écoulé entre la perception de la lumière et celle du son. Que cette appréciation se fît au moyen d'un pendule à seconde ou d'un chronomètre, elle était le résultat de l'accomplissement d'un certain nombre d'actes physiologiques réclamant chacun une certaine durée, et une durée différente suivant les cas. De là une incertitude, qui n'est que trop visible sur le tableau résumant les expériences si soignées des membres du Bureau des Longitudes, et qui, jointe à l'erreur systématique due au chronomètre, pèse non moins fortement sur les expériences des savants hollandais.

[1] Avec le coefficient de dilatation de l'air fixé par Regnault, ce nombre se réduit à $332^m,25$ (Bravais et Martins).

Expériences de Regnault (1). — Par un heureux emploi de l'inscription graphique et des transmissions électriques, Regnault supprima complètement l'intervention de l'opérateur. En outre, pour éliminer la plupart des difficultés que présentent les expériences à l'air libre, il opéra de préférence sur des tuyaux (2).

De 1862 à 1866, il effectua une longue série de recherches sur la propagation du son dans les tuyaux, en profitant des grands travaux de canalisation que la ville de Paris faisait alors exécuter pour conduire le gaz d'éclairage dans la zone annexée et pour amener à l'intérieur les eaux de la Marne et de la Dhuis. Une conduite spéciale fut en outre installée au Collège de France pour certaines déterminations.

L'un des orifices A du tuyau en expérience était fermé herméti-

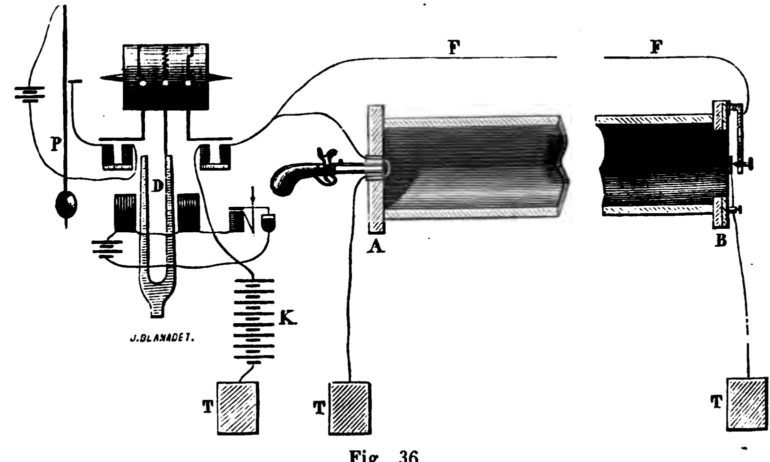


Fig. 36

quement par une plaque de tôle percée en son centre d'une ouverture dans laquelle s'engageait le canon d'un pistolet maintenu par un bouchon de liège. Le pistolet étant chargé à poudre, on tendait sur la bouche un fil fin d'acier, communiquant par l'un de ses bouts

(1) REGNAULT, *Relation des expériences entreprises pour déterminer les données des machines à feu*, III; 1870.

(2) Biot avait déjà fait quelques observations intéressantes sur la propagation du son dans les tuyaux des aqueducs de Paris (BIOT, *loc. cit.*, p. 7); et M. Le Roux avait employé à la détermination de la vitesse du son un tuyau en zinc, de 72 mètres, fermé à chacune de ses extrémités par une membrane dont il inscrivait le déplacement sous l'influence de l'onde provoquée par l'explosion d'une capsule fulminante, ce qui lui donna pour la vitesse du son à zéro, dans l'air sec et privé d'acide carconique, 330^{m},7 (LE ROUX, C. R., LV, 239; 1862; et *loc. cit.*).

avec la terre et par l'autre bout avec l'un des pôles d'une pile K dont le deuxième pôle était lui-même à la terre. L'extrémité opposée du tuyau B était fermée par une membrane mince en caoutchouc, au centre de laquelle on avait collé un petit disque en platine, relié au sol par un fil métallique très flexible. En face de ce disque et à très petite distance se trouvait une pointe mousse, rattachée à la pile K par un fil télégraphique F, bien isolé, qui suivait le tuyau dans tout son parcours. Enfin, auprès de la station A était disposé un appareil enregistreur, constitué essentiellement par un cylindre tournant, sur lequel une longue bande de papier noirci recevait au passage les marques de trois styles inscrivant, le premier les oscillations d'un pendule à seconde P, le deuxième les vibrations d'un diapason D entretenu électriquement, le troisième les interruptions et les rétablissements du courant de la pile K, comme l'indique la figure schématique ci-contre.

Cela posé, pour faire une expérience on mettait en mouvement l'appareil enregistreur et l'on faisait partir le coup de pistolet. La bourre, en sortant du canon, rompait le fil métallique tendu devant et arrêtait le courant : cette interruption était marquée sur la bande de l'appareil enregistreur.

Lorsque l'onde, arrivant à l'extrémité B du tuyau, poussait la membrane de caoutchouc, le disque en platine venait frapper la pointe mousse terminant la ligne télégraphique : le courant se trouvait rétabli, et l'instant précis de ce rétablissement était inscrit sur le papier enfumé [1].

Pour avoir le temps, en secondes, que l'onde met à parcourir le tuyau, il suffit de compter sur la bande de papier le nombre de vibrations (et la fraction de vibration) du diapason, qui sont comprises entre la marque du départ en A et celle de l'arrivée en B, ainsi que le nombre des vibrations du diapason qui correspond dans le même moment à une oscillation du pendule à seconde.

Mais l'onde arrivée à l'extrémité B du tuyau s'y réfléchit, revient vers l'extrémité A où elle se réfléchit encore, retourne en B où elle marque de nouveau, et ainsi de suite. On peut donc suivre la propagation pendant un très long parcours, tout naturellement partagé

[1] On avait eu soin de déterminer par des expériences préalables le temps que le disque mettait à toucher le buttoir quand l'onde lui arrivait.

en sections de même longueur. Il est aisé d'ailleurs de multiplier, au besoin, les sections à l'aide de tubulures latérales, et d'inscrire le passage des ondes non seulement en A et B, mais aussi aux stations intermédiaires.

On a varié les procédés pour produire les ondes, en employant divers pistolets avec des charges différentes, en utilisant l'explosion très brève d'étoupilles à canon ou la détonation d'un mélange d'hydrogène et d'oxygène, en injectant de l'air comprimé, en poussant brusquement un piston à l'entrée du tuyau, ou enfin en émettant des sons musicaux au moyen d'instruments ou de la voix humaine.

Regnault a opéré sur sept conduites distinctes :

	Longueur.	Stations.	Diamètre.
Tuyaux du Collège de France	70^{m}	1	$0^{m},108$
— à gaz de la route militaire. . . .	3000	5	0,108
— — de Choisy-le-Roi.	3625	5	0,216
— à eau de la route militaire	2000	2	0,300
— — du siphon de Villemomble.	4900	1	1,100
— — de l'égout Sébastopol . . .	960	4	1,100
— — de l'égout Saint-Michel . .	1420	6	1,100

Nous rapporterons, par exemple, les nombres N de vibrations du diapason inscrites entre la marque du départ et celle de l'arrivée sur la membrane A, dans la première série des expériences de l'égout Saint-Michel : L est la longueur du tuyau, c le chemin parcouru par l'onde depuis son départ jusqu'à la membrane, et n le nombre des vibrations du diapason correspondant à une oscillation du pendule au moment de l'expérience (ce nombre ici n'a pas varié sensiblement et a été égal en moyenne à 50,971); on a donc $V = \frac{cn}{N}$ pour la *vitesse moyenne* du son pendant le parcours c. Si la température avait été zéro, cette vitesse moyenne aurait été V_0; et si en outre l'air avait été débarrassé d'humidité, elle aurait été V'_0 [1]. Nous

[1] La vitesse dans l'air sec est plus petite que dans l'air humide, parce que la présence de la vapeur d'eau dans l'atmosphère a pour effet d'en diminuer la densité. Si V est la vitesse de propagation dans l'air humide à la tempéra-

désignerons enfin par W'_0 la vitesse avec laquelle dans de l'air sec et à zéro aurait été parcourue la dernière longueur $2L$ du trajet (abstraction faite de la petite correction due à l'inertie de la membrane).

Égout-Saint-Michel. I (17 avril 1866).

$T = 10°,5$ $H = 758^{mm}$ $f = 9^{mm},47$ Membrane A

Nos des bandes	$2n$	$2L = 2835^m,9$	$4L = 5671^m,8$	$6L = 8507^m,7$	$8L = 11343^m,6$	$10L = 14179^m,5$
1	101,92	426,5	854,9	1283,7	1712,7	»
2	101,96	426,9	855,1	1283,6	1712,3	2141,1
3	101,96	426,05	854,45	1283,15	1711,95	»
4	101,92	427,1	855,6	1284,1	1712,8	»
5	101,93	426,65	855,25	1283,55	1712,35	»
6	101,96	426,8	854,9	1283,6	1712,3	2141,4
Moyennes..	101,942	426,66	855,03	1283,62	1712,40	2141,25
	$V =$	$338^m,81$	$338^m,14$	$337^m,86$	$337^m,68$	$337^m,57$
	$V_0 =$	332 ,46	331 ,79	331 ,51	331 ,33	331 ,22
	$V'_0 =$	331 ,68	331 ,01	330 ,73	330 ,55	330 ,44
	$W'_0 =$	331 ,68	330 ,31	330 ,14	329 ,99	329 ,93

Dans le seul égout Saint-Michel, Regnault fit ainsi vingt-cinq séries d'expériences, portant chacune généralement sur six membranes, placées respectivement aux orifices A et B et sur quatre tubulures latérales espacées le long du tuyau.

Les principaux résultats de toutes ces expériences peuvent se formuler comme il suit :

1° Dans un tuyau cylindrique, l'intensité de l'onde ne reste pas constante, mais elle s'affaiblit avec la distance, et d'autant plus rapidement que le tuyau est plus étroit [1]. Un coup de pistolet chargé à 1 gramme de poudre cessa

ture t et à la pression H, la force élastique de la vapeur d'eau étant f, on a

$$V'_0 = V \sqrt{\frac{1 - 0,38\frac{f}{H}}{1 + \alpha t}}.$$

C'est d'ailleurs un avantage des expériences dans des tuyaux souterrains que l'humidité bien définie de la masse gazeuse sur laquelle on opère.

[1] La nature des parois a également une influence. Dans les égouts de Paris où l'on prévient les ouvriers par le son de la trompette, il est connu que les signaux portent incomparablement plus loin dans les galeries revêtues intérieurement d'un ciment bien lisse que dans celles où les parois sont formées par de la meulière brute.

d'être entendu après	1150^m	et de marquer après	4056^m	dans une conduite de	$0^m,108$
—	2810	—	11430	—	0 ,300
—	9540	—	19850	—	1 ,100

A Villemomble, avec une charge de $2^{gr},40$, on notait facilement le dixième retour à la membrane A : ainsi, malgré vingt réflexions successives, le son agissait encore sur la membrane après un parcours de près de 100 kilomètres (la distance de Paris à Amiens). Sans ces réflexions, qui contribuent surtout à l'affaiblir, le son se transmettrait donc en tuyau large à une distance énorme, et l'on comprend que dans les expériences qu'il fit sur une conduite de grand diamètre, Biot n'ait constaté à l'oreille aucun affaiblissement pour un trajet direct de 951 mètres.

2° La vitesse du son diminue en même temps que l'intensité. Quelques nombres, pris au hasard parmi les mesures, le montrent nettement :

Conduite de $0^m,108$ Charge de poudre = $0^g,4$		Conduite de $0^m,300$ Charge de poudre = $0^g,4$, puis $1^g,5$		Conduite de $1^m,100$ Charge de poudre = 1^g	
c	V'_0	c	V'	c	V'_0
1351,95	329,95	1905,0	332,37	749,1	334,16
2703,90	328,20	3810,0	330,34	1417,9	332,50
4055,85	326,77	—	—	2835,8	331,72
5407,80	323,34 (?)	3810,3	332,18	5671,8	331,24
		7620,6	330,43	11343,6	330,68
		11430,0	329,64	19851,3	330,52
		15240,0	328,96		

3° La vitesse tend vers une limite, qui est représentée par un nombre d'autant plus élevé que le tuyau est plus large [1].

[1] M. von Helmholtz, dans un mémoire sur la théorie des vibrations de l'air dans les tuyaux ouverts, a donné pour la vitesse U de propagation du son dans un tuyau de diamètre 2R, la formule

$$U = V\left(1 - \frac{\eta}{2R\sqrt{\pi N}}\right),$$

V étant la vitesse de propagation dans l'air libre,
η le coefficient de frottement interne du gaz remplissant le tuyau,
N le nombre de vibrations du son considéré.

Depuis, M. Kirchhoff a repris la même question en tenant compte de la chaleur cédée ou enlevée par la paroi du tuyau, et il est arrivé à la même formule, sauf que le coefficient η représente alors une constante dépendant à la fois du

L'existence d'une limite ressort immédiatement de l'examen des vitesses moyennes sur tout le chemin parcouru par l'onde depuis son départ jusqu'au moment où elle trace sa dernière marque. Ces vitesses moyennes limites V'_0 ont été trouvées

sur la conduite de	$0^m,108$,	$V'_0 = 326,66$	(chemin parcouru 4055,9)
—	0 ,216	328,18	(— 6238,9)
—	0 ,300	328,96	(— 15240,0)
—	1 ,100	330,52	(— 19851,3)

En prenant la vitesse de propagation dans le dernier parcours pour lequel l'onde puisse encore marquer sur les membranes, on trouve pour W'_0 (correction faite de l'inertie des membranes) :

Diamètre de la conduite.	W'_0
$0^m,108$	324,25
0 ,216	326,0
0 ,300	329,25
1 ,100	330,3

Malheureusement la détermination exacte de ces vitesses W'_0 est particulièrement difficile, le trajet étant court et l'inertie de la membrane ayant plus d'influence dans le cas des ondes faibles. Le dernier nombre seul présente quelque certitude : il diffère très peu de la vitesse moyenne limite V'_0 dans le même tuyau [1], où les pa-

frottement intérieur du gaz et de l'effet thermique de la paroi. (HELMHOLTZ, *Journal de Crelle*, LVII, 1; 1860; et KIRCHHOFF, *Pogg. Ann.*, CXXXIV, 177; 1868.)

MM. Schneebeli et A. Seebeck ont tenté de reconnaître si les faits étaient d'accord avec la théorie; à cette fin, ils ont effectué des mesures indirectes de la vitesse du son au moyen des phénomènes d'interférences dans de courts tuyaux de différents diamètres (355); et ils ont trouvé que la différence entre la vitesse de propagation à l'air libre et la vitesse dans un tuyau était en effet sensiblement en raison inverse du diamètre du tuyau. Ainsi M. Schneebeli obtient, V étant égal à $332^m,25$:

2R	V — U	(V — U) 2R
21^{mm}	$3^m,50$	63,50
12	5 ,13	61,56
6,5	9 ,95	64,67

Mais l'influence de la hauteur a paru plus marquée que ne l'indique la formule. Avec un tuyau de $3^{mm},4$, M. A. Seebeck trouve, par exemple, pour ut_4 ($N = 512$), sol_3 ($N = 384$), et mi_3 ($N = 320$) des différences V — U respectivement égales à $9^m,79$, $13^m,91$, et $15^m,51$. (SCHNEEBELI, *Pogg. Ann.*, CXXXVI, 296; 1869; et A. SEEBECK, *ibid.*, CXXXIX, 104; 1870.)

[1] En calculant cette vitesse V'_0 sur le trajet total diminué de la première longueur 2L, on trouve encore le même nombre $330^m,6$.

rois ne doivent plus avoir déjà qu'une action négligeable. Tout compte fait, Regnault admet pour la vitesse limite

$$a_0 = 330^m,6.$$

4° Le mode de production de l'onde ne semble pas avoir d'effet sensible sur la vitesse de propagation. Cette vitesse s'est montrée exactement la même pour les ondes engendrées par l'explosion d'un mélange de 2 volumes d'hydrogène et de 1 volume d'oxygène que pour celles qui provenaient d'un coup de pistolet. L'onde produite par un piston frappeur marcha un peu moins vite, mais cela tenait à ce qu'elle avait moins d'intensité, car dans la conduite de l'égout Saint-Michel elle n'a jamais marqué un second retour, alors que l'onde fournie par le coup de pistolet en donnait constamment plusieurs.

Relativement aux sons musicaux perçus par l'oreille, Regnault a trouvé que la vitesse apparente de propagation des sons aigus est sensiblement moindre que celle des sons graves. Mais, ajoute-t-il, ce fait peut provenir uniquement de ce que le tympan de l'oreille se mettrait plus vite à vibrer avec les notes graves qu'avec les notes aiguës [1]. Une conséquence immédiate, c'est qu'en parcourant de grandes longueurs de tuyaux, le son ne conserve pas son timbre.

5° La vitesse de propagation d'une onde dans un gaz est la même, quelle que soit la pression que le gaz supporte. Ce fait, déjà établi par les expériences en montagne, a été vérifié sur la conduite du Collège de France pour des variations de pression comprises entre $0^m,247$ et $1^m,267$: il n'a pas été possible de constater une différence sensible entre les vitesses sous des pressions si éloignées l'une de l'autre.

6° Enfin l'influence de la densité a été l'objet d'expériences directes sur les gaz que l'on a pu préparer en quantités suffisantes pour en remplir la conduite de la route d'Ivry (faisant partie de a conduite à gaz de la route militaire) ou celle du Collège de France. Nous réunirons en un seul tableau les résultats obtenus

[1] De ce qui a été dit plus haut (p. 57 et 68), il résulterait au contraire que la vitesse des sons graves doit être moindre que celle des sons aigus.

sur les deux conduites : V et V′ sont les vitesses dans le gaz et dans l'air, δ est la densité du gaz par rapport à l'air. Si le gaz et l'air obéissaient également aux lois de Mariotte, de Charles et de Poisson, on devrait avoir $\frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{1}{\delta}}$.

	$\frac{V'}{V}$ Conduite de 567m,5	$\frac{V'}{V}$ Conduite de 70m,5	$\sqrt{\frac{1}{\delta}}$
Hydrogène	3,801	»	3,682
Acide carbonique	0,7848	0,8009	0,8087
Protoxyde d'azote	»	0,8007	0,8100
Ammoniaque	»	1,2279	1,3025

L'accord entre les valeurs de $\frac{V'}{V}$ et celles de $\sqrt{\frac{1}{\delta}}$ paraîtra suffisant si l'on considère qu'il est difficile d'opérer sur des gaz très purs dans des conduites d'aussi grande capacité.

Regnault a également fait des mesures de la vitesse de propagation du son dans l'air libre (1). Il a suivi la méthode des coups réciproques, mais en éliminant complètement l'appréciation humaine pour fixer l'instant du départ du coup et celui de l'arrivée de l'onde à la seconde station. Afin de rendre ces nouvelles expériences parfaitement comparables à celles qu'il avait faites dans les conduites cylindriques, il a employé les mêmes appareils marqueurs et enregistreurs et il a mené les expériences autant que possible de la même façon. Toutefois la marque d'arrivée de l'onde à la deuxième station a présenté une difficulté inattendue. Quelque violent que fût le choc du disque de la membrane contre le buttoir, le style de l'appareil enregistreur restait immobile. Ce fait, qui s'était déjà rencontré dans les gros tuyaux pour les membranes trop rapprochées de l'origine, résulte de ce que l'explosion de la poudre dans la bouche à feu ne produit pas une onde condensante unique,

(1) Pour opérer dans un espace restreint, M. Bosscha a employé la *méthode des coïncidences* (91) : on déterminait au moyen de l'oreille les coïncidences des battements de deux pendules à très peu près synchrones, les deux appareils étant d'abord placés à côté de l'observateur, puis l'un d'eux étant éloigné à quelque distance, de façon que ses battements arrivassent à l'oreille avec un retard que l'expérience même faisait connaître. (Bosscha, *Algemeene Konst-en Letterbode;* 1853, par. 2, p. 401; ou *Pogg. Ann.*, XCII, 485. Voir aussi Kœnig, C. R., LV, 603; 1862, et *Quelques expériences d'acoustique*, 30. Paris, 1882.).

mais une série d'ondes alternativement condensantes et dilatantes qui impriment à la membrane une succession rapide de mouvements opposés, et ne laissent pas au contact du disque avec le buttoir une durée assez longue pour que le courant s'établisse nettement à travers les bobines de l'appareil enregistreur, tandis que dans les tuyaux étroits à une faible distance il n'y a plus qu'une onde unique, amenant un contact qui fait marcher franchement le marqueur. Pour obvier à cette difficulté, on inscrivit l'arrivée des ondes non par une mise en contact, mais par une rupture. Une modification très simple permit d'atteindre ce résultat.

Les expériences furent faites au polygone de Satory près Versailles. Elles ont montré que la méthode des coups réciproques ne suffit pas à corriger l'influence du vent : pour qu'il en fût autrement, il faudrait en effet que le vent eût une direction et une intensité constantes sur toute l'étendue parcourue pendant la durée entière d'une expérience complète; et, quoiqu'une expérience ne durât ici que vingt-trois secondes, on ne saurait affirmer que les deux conditions étaient exactement remplies pendant ce laps de temps. Toutefois, en multipliant les expériences, on parvient à atténuer cette erreur accidentelle. La moyenne des résultats fournis par 334 coups réciproques deux à deux, réduite à zéro et à la sécheresse absolue, fut, pour une distance de 2445 mètres,

$$V'_0 = 330^m,7,$$

valeur singulièrement concordante avec celle que l'on avait trouvée dans les tuyaux de $1^m,10$. La petite différence entre ces deux nombres est même dans le sens voulu, car au moment où l'onde marquait sur la membrane dans les expériences à l'air libre, elle avait encore beaucoup plus d'intensité que lorsqu'elle faisait sa dernière marque sur les membranes des conduites.

Ainsi, la vitesse de propagation d'un ébranlement infiniment petit, dans l'air sec à zéro, doit être très voisine de la valeur indiquée précédemment

$$a_0 = 330^m,6.$$

Nous étudierons plus loin des expériences permettant de déterminer indirectement la vitesse du son dans les gaz.

347. Vitesse du son dans les liquides. — La formule

$$a=\sqrt{\frac{E}{D}}$$

est immédiatement applicable. La compression d'un liquide n'entraînant pas d'effet calorifique appréciable, on a

$$E=\frac{\text{accroissement de pression}}{\text{compression correspondante}}=\frac{gmH}{\varkappa}:$$

g est l'intensité de la pesanteur,
m la densité du mercure,
H la hauteur barométrique normale,
$\varkappa$ le coefficient de compressibilité du liquide;
donc

$$a=\sqrt{\frac{gmH}{\varkappa D}},$$

D étant la densité du liquide à la température de l'expérience; et cette formule convient également à la propagation, soit dans une colonne cylindrique, soit dans un milieu indéfini.

La vitesse, en mètres, du son dans l'eau à 4° (à cette température, d'après Grassi (196), $\varkappa = 0{,}0000499$) sera ainsi

$$a=\sqrt{\frac{9{,}81 . 13{,}59 . 0{,}760}{0{,}0000499 . 1}}$$
$$= 1425 \text{ mètres},$$

soit environ quatre fois et demie la vitesse dans l'air.

L'eau est le seul liquide sur lequel on ait fait des mesures directes.

Les premières expériences sont dues à Beudant [1], qui trouva à Marseille, en 1820, que le son parcourait dans l'eau de mer environ 1 500 mètres par seconde.

En 1827, Colladon et Sturm [2] mesurèrent avec beaucoup de soin la vitesse de transmission du son dans l'eau du lac de Genève, entre

(1) Beudant, *Expériences inédites*, rapportées dans le Mémoire de Colladon et Sturm.
(2) Colladon et Sturm, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXVI, 236; 1827.

deux bateaux amarrés l'un à Rolle, l'autre à Thonon, et séparés par une distance de 13487 mètres. Au bateau de Rolle était suspendue une grosse cloche C, contre laquelle un battant B pouvait être abaissé au moyen d'un levier extérieur L; ce levier était disposé de

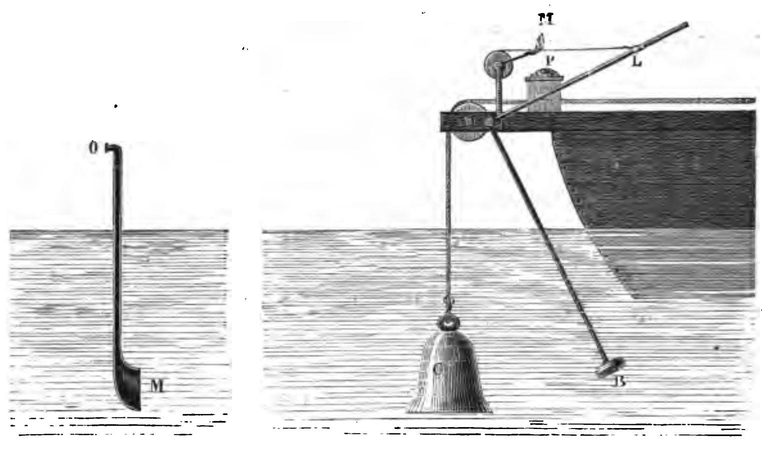


Fig. 37

manière qu'à l'instant même où le coup était frappé, une mèche M vînt enflammer un petit tas de poudre P, dressé à l'avant du bateau. Les observateurs placés sur l'autre bateau notaient l'époque où ils voyaient ce signal, puis celle où ils percevaient le son, à l'aide d'une sorte de grand cornet acoustique plongeant dans l'eau, et dont le pavillon était fermé par une membrane M, tandis que l'extrémité supérieure venait s'adapter à l'oreille en O. Le temps écoulé entre ces deux époques fut trouvé en moyenne de $9^s,4$, ce qui donna pour la vitesse du son dans l'eau à $8^\circ,1$,

$$a = 1435 \text{ mètres.}$$

Ce nombre est presque identique à celui que fournit le calcul; mais l'indécision relative à la valeur de $\varkappa$ ne permet pas une comparaison rigoureuse entre la théorie et l'expérience.

348. Vitesse du son dans les solides. — *Vitesse du son dans une tige.* — La vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal dans une tige solide est encore

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}},$$

E étant sensiblement le coefficient d'élasticité (142), et D représentant toujours la densité du corps. Si l'on introduit, au lieu de D, le poids spécifique p, on a

$$a = \sqrt{\frac{gE}{p}}.$$

Appliquons par exemple cette formule à la détermination de la vitesse, en mètres, du son dans une tige de fer indéfinie. Le coefficient d'élasticité du fer, rapporté au millimètre carré (152), est d'environ 20000 kilogr.; donc, pour 1 mètre carré, E = 20000000000. La densité tabulaire du fer étant 7,7, le poids du mètre cube est 7700 kilogr. On a par conséquent

$$a = \sqrt{\frac{9,81 . 20000000000}{7700}}$$
$$= 5100 \text{ mètres},$$

soit quinze fois la vitesse dans l'air.

On trouverait ainsi pour la vitesse du son dans les divers solides, en forme de verges minces, de fils ou de tubes, libres de se dilater et de se contracter latéralement :

Sapin.	6000	mètres, soit	18	fois la vitesse	dans l'air.
Verre.	5200	—	15,5	—	—
Acier.	5200	—	15,5	—	—
Fer.	5100	—	15	—	—
Fonte.	4300	—	12	—	—
Cuivre	3750	—	11	—	—
Laiton	3550	—	10,5	—	—
Platine. . . .	2650	—	8	—	—
Argent. . . .	2600	—	7,5	—	—
Or.	1750	—	5	—	—
Plomb	1200	—	3,5	—	—

Les mesures directes présentent de grandes difficultés.

Biot[1], avec l'aide de Martin, habile ouvrier en horlogerie, tenta

(1) Biot, *loc. cit.*, p. 26.

de déterminer la vitesse du son dans la fonte en opérant sur une conduite de $951^m,25$. Un marteau, disposé à l'une des extrémités, frappait en même temps sur la paroi et sur un timbre suspendu à l'entrée de la conduite. L'observateur placé à l'autre extrémité entendait deux sons successifs, transmis l'un par la fonte, l'autre par l'air. L'expérience consistait à mesurer sur un chronomètre le temps qui s'écoulait entre les deux sons. Mais la brièveté de ce temps ($2^s,5$) et la discontinuité de la paroi (la conduite était formée de 376 tuyaux séparés par des rondelles de plomb revêtues de futaine goudronnée) ne permettaient pas d'espérer un résultat très exact. Biot trouva ainsi que la vitesse de propagation du son dans la fonte était dix fois et demie la vitesse de propagation dans l'air.

En 1851, Wertheim et Breguet [1] reprirent la question, en opérant sur les fils télégraphiques du chemin de fer de Versailles (rive droite), entre Asnières et Puteaux. La longueur du trajet ($4067^m,3$) était suffisante pour une détermination convenable de la durée de la transmission entre les deux stations par l'enregistrement de l'arrivée du son, qui provenait d'un coup de marteau frappé à une époque donnée sur le poteau en tête. Mais il se rencontra cette circonstance singulière que le son ne put franchir le tunnel de Puteaux malgré l'isolement des fils ne touchant nulle part. Il est donc probable que le bruit, que l'on entendait nettement jusqu'à l'entrée du tunnel, était transmis non par les fils télégraphiques, mais par le sol même dans lequel étaient plantés les poteaux, ce bruit perdant ensuite toute intensité en se disséminant dans la masse du Mont-Valérien. La vitesse de 3485 mètres résultant des expériences de Wertheim et Breguet serait donc simplement la vitesse de la transmission par le sol entre les deux stations.

Vitesse du son dans un solide indéfini. — La vitesse de la propagation d'un ébranlement dans une verge libre de se contracter ou de se dilater transversalement, en même temps qu'elle s'allonge ou se raccourcit longitudinalement, ne convient pas au cas d'une masse solide indéfinie où, pareille liberté n'existant plus, les tensions aux deux bases d'un cylindre quelconque découpé dans la masse n'obéissent plus aux mêmes lois.

(1) Wertheim et Breguet, C. R., XXXII, 293; 1851.

Considérons un milieu solide, isotrope, et indéfini dans tous les sens. Un ébranlement initial, produit en quelque région très petite de ce milieu, se propage en tous sens, sous la forme d'une onde sphérique dont le rayon s'accroît uniformément. A une distance très grande du centre d'ébranlement, les sphères, qui figurent les positions successives de l'onde, peuvent dans leurs parties en regard être remplacées par leurs plans tangents; en d'autres termes, aux ondes sphériques on peut substituer des ondes planes, normales à la direction suivant laquelle s'effectue la propagation. Plaçons l'origine des coordonnées sur l'une quelconque de ces ondes, une onde située à la distance r de celle-ci aura pour équation

$$ax + by + cz = r,$$

où a, b, c sont les cosinus des angles que la direction de la propagation fait avec les axes des coordonnées, et r la distance de l'onde à l'origine.

Le mouvement se propageant avec la vitesse cherchée V, le déplacement u d'une molécule (y, x, z) de l'onde r à l'époque t est égal et parallèle à celui qu'éprouvait à l'époque $t - \frac{r}{V}$ la molécule située actuellement à l'origine des coordonnées. Nous pouvons donc poser

$$u = f\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right),$$

$f(t)$ représentant le déplacement variable de la molécule située à l'origine; et si nous appelons α, β, γ les cosinus des angles de ce déplacement avec les axes des coordonnées, les projections de u sur les axes sont

$$\xi = \alpha u, \qquad \eta = \beta u, \qquad \zeta = \gamma u.$$

Il faut que ces valeurs particulières vérifient les équations aux différentielles partielles qui régissent tous les petits mouvements intérieurs du milieu considéré (145), c'est-à-dire les équations (19 *bis*),

lesquelles, abstraction faite des forces étrangères sauf les forces d'inertie, sont

$$(19\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta^2\xi=\rho\frac{d^2\xi}{dt^2},\\ &(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\Delta^2\eta=\rho\frac{d^2\eta}{dt^2},\\ &(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\Delta^2\zeta=\rho\frac{d^2\zeta}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

où

$$(15)\qquad \theta=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz},$$

et

$$\Delta^2=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

Calculons $\frac{d\theta}{dx}$:

$$\frac{d\xi}{dx}=\alpha\frac{du}{dx}=-a\alpha\frac{f'}{V},$$
$$\frac{d\eta}{dy}=\beta\frac{du}{dy}=-b\beta\frac{f'}{V},$$
$$\frac{d\zeta}{dz}=\gamma\frac{du}{dy}=-c\gamma\frac{f'}{V},$$

d'où, en appelant $n=a\alpha+b\beta+c\gamma$ le cosinus de l'angle que font entre elles la direction du déplacement et celle de la propagation,

$$\theta=-n\frac{f'}{V};$$

et par suite

$$\frac{d\theta}{dx}=an\frac{f''}{V^2}.$$

On trouvera de même

$$\Delta^2\xi=\alpha\frac{f''}{V^2}.$$

Enfin

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\alpha\frac{d^2u}{dt^2};$$

et par conséquent

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\alpha V^2\frac{f''}{V^2}.$$

La substitution de ces valeurs dans la première des équations (19bis) donne, après suppression du facteur $\frac{f''}{V^2}$, la première des équations suivantes, les deux autres s'obtenant de même,

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)an+(\mu-\rho V^2)\alpha=0, \\ (\lambda+\mu)bn+(\mu-\rho V^2)\beta=0, \\ (\lambda+\mu)cn+(\mu-\rho V^2)\gamma=0. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces trois équations, respectivement multipliées par a, b, c, il vient

$$(\lambda+2\mu-\rho V^2)n=0.$$

Cette relation doit être vérifiée; il faut donc que l'on ait

$$\text{ou} \quad \lambda+2\mu-\rho V^2=0, \qquad \text{ou} \quad n=0.$$

Dans le premier cas,

$$V_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

mais en même temps, les trois dernières équations deviennent

$$an=\alpha, \quad bn=\beta, \quad cn=\gamma;$$

et, si on les ajoute après les avoir multipliées par α, β, γ, on trouve

$$n^2=1,$$

c'est-à-dire que le déplacement est alors dirigé dans le sens même de la propagation.

Dans le second cas, puisque $n=0$, le déplacement s'opère dans le plan de l'onde : la dilatation $\theta=n\frac{du}{dr}$ est nulle; en d'autres termes, la densité du milieu n'éprouve aucun changement, et les équations se réduisent à

$$V_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Ainsi, quand une onde plane se propage dans un milieu isotrope,

si le déplacement est longitudinal, sa vitesse de propagation est V_1, ou, si l'on tient compte des valeurs (12) et (13) du coefficient d'élasticité E et du coefficient de Poisson σ (142), et si l'on remplace la densité ρ par $\frac{p}{g}$,

$$V_1 = \sqrt{\frac{gE}{p} \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}};$$

si le déplacement est transversal, la vitesse est moindre et égale à V_2,

$$V_2 = \sqrt{\frac{gE}{p} \frac{1}{2(1+\sigma)}}.$$

Par suite, comme Poisson [1] l'a montré le premier, un déplacement quelconque au centre même de l'ébranlement se décompose pour chaque direction en un déplacement parallèle au rayon, ou longitudinal, et en un déplacement perpendiculaire, ou transversal, lesquels se séparent immédiatement, puisque le premier marche plus vite que le second, et se propagent ensuite avec leurs vitesses propres.

D'après Wertheim $\sigma = \frac{1}{3}$, les vitesses V_1 et V_2 ont respectivement pour expressions

$$V_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{gE}{p}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{gE}{p}} = a\sqrt{\frac{3}{8}},$$

et le rapport

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}} = \frac{1}{2}.$$

Si, comme le voulait Poisson, $\lambda = \mu$, et par suite $\sigma = \frac{1}{4}$,

$$V_1 = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{gE}{p}} = a\sqrt{\frac{6}{5}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{2}{5}\frac{gE}{p}} = a\sqrt{\frac{2}{5}},$$

et

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{1,732}.$$

Aucune expérience directe n'a encore vérifié ces résultats de la

[1] Poisson, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXII, 250 et XLIV, 423; 1823-30.

théorie. Wertheim a seulement remarqué que les tremblements de terre semblent en effet accuser la production de deux ondes.

349. Relation fondamentale entre la longueur d'onde, la période et la vitesse du son. — Quand un son de hauteur donnée se propage dans un milieu homogène quelconque avec une vitesse V, la longueur d'onde λ du son considéré étant la distance à laquelle il se transmet dans le milieu pendant la durée τ d'une vibration, on a nécessairement

$$\lambda = V\tau.$$

Si l'on désigne par N le nombre des vibrations effectuées en 1^s, on a

$$N\tau = 1,$$

et la formule précédente peut encore s'écrire

$$\lambda = \frac{V}{N}.$$

La période τ, ou le nombre N de vibrations dans l'unité de temps, est caractéristique du son donné ; la vitesse V dépend du milieu où se propage le son ; la longueur d'onde λ résulte à la fois de la hauteur du son et de la vitesse avec laquelle il se transmet dans le milieu.

Nous savons déjà comment on peut avoir τ (ou N) et V ; nous apprendrons bientôt à mesurer λ ; et bien que la mesure directe de ce dernier paramètre ne soit pas indispensable, elle n'en aura pas moins son prix.

Longueurs d'onde des sons usuels. — Dans le tableau suivant on a mis, en regard des nombres de vibrations [1] qui se rencontrent le plus souvent et des périodes correspondantes, les longueurs d'onde dans l'air à la température ordinaire ($V = 340^m$) :

[1] Nous comptons toujours par vibrations complètes ou *vibrations doubles*.

		N	$\tau = \frac{1}{N}$	λ	
Sons fondamentaux de Sauveur.	ut_{-1}	32[v]	0[s],03125	10[m],63 ou	32 pieds
	ut_1	64	0 ,01563	5 ,31	16
	ut_2	128	0 ,00781	2 ,66	8
	ut_3	256	0 ,00391	1 ,33	4
	ut_4	512	0 ,00195	0 ,664	2
	ut_5	1024	0 ,00098	0 ,332	1
Diapason normal	la_3	435	0 ,00230	0 ,782	
Diapasons chronographiques.		50	0 ,02000	6 ,80	
		100	0 ,01000	3 ,40	
		200	0 ,00500	1 ,70	
		300	0 ,00333	1 ,13	
		400	0 ,00250	0 ,85	
		500	0 ,00200	0 ,68	
		1000	0 ,00100	0 ,34	

350. Réflexion du son. — *Lois de la réflexion.* — Quand des ondes circulaires excitées à la surface d'une nappe d'eau rencontrent le bord, elles rebondissent contre l'obstacle et reviennent sur elles-mêmes [1].

Pareillement, les ondes aériennes qui portent le son se réfléchissent à la surface des obstacles qu'elles rencontrent, ainsi que l'attestent les phénomènes vulgaires d'écho et de résonnance ; et cette réflexion obéit, comme celle des ondes liquides, aux lois bien connues de la réflexion de la lumière. Si l'on désigne par *rayon* la direction suivant laquelle s'effectue la propagation, et si l'on appelle *angles d'incidence et de réflexion* les angles que le rayon incident et le rayon réfléchi forment respectivement avec la normale au point d'incidence, le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans

[1] Pour faire voir en projection la réflexion des ondes liquides, on prendra, d'après Desains, une auge rectangulaire remplie de mercure, on placera au-dessus un diaphragme percé d'une fente de dimensions un peu moindres que l'auge, de façon à cacher les bords du bain qui gâteraient l'image, et l'on fera tomber obliquement sur le mercure un large faisceau lumineux que recevra ensuite une lentille disposée de manière à donner sur l'écran une image nette de la surface du bain. Si alors on frappe légèrement l'un des côtés de l'auge, on verra des rides planes partir de ce bord, s'avancer jusqu'au côté opposé, revenir en arrière, et traverser ainsi plusieurs fois le champ en sens alternativement opposés. Avec une auge ronde, il n'y a qu'à toucher le centre pour produire des rides circulaires qui, après avoir été frapper les bords, se replient vers le centre. Il suffit même d'un choc contre la table ou contre le sol pour faire apparaître les rides en question.

un même plan normal à la surface réfléchissante, et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Pour montrer dans les cours que la réflexion du son suit les mêmes règles que celle de la lumière, on se sert ordinairement des *miroirs conjugués*. Ce sont deux miroirs sphériques, M et M', que l'on dispose à 5 ou 6 mètres de distance, l'un en face de l'autre, de façon que leurs axes coïncident suivant AA'. On place une bougie à l'un des foyers F ; l'image de cette bougie se forme à l'autre foyer F', où l'on peut la recevoir sur un écran. Si l'on substitue à la bougie en F une montre dont le tic-tac est

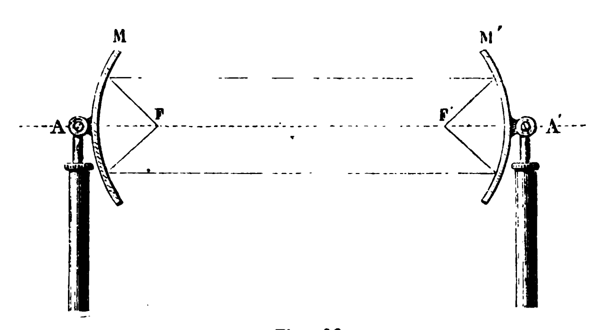


Fig. 38

imperceptible directement à une distance de 1 ou 2 mètres, on constate que l'oreille placée en F' l'entend très bien [1].

Échos, résonnances. — De la grandeur des ondes sonores, énormes par rapport aux ondes lumineuses, il résulte d'ailleurs, ainsi que nous le verrons plus loin, que telles aspérités, qui rendraient le miroir absolument mauvais au point de vue optique, seront sans influence appréciable sur la réflexion du son. C'est ainsi qu'une muraille, une montagne, un groupe d'arbres constitueront de bons miroirs pour le son [2].

Certaines formes de voûtes donnent lieu à des phénomènes curieux par suite de la réflexion du son à leur surface, suivant les lois géométriques rappelées plus haut. Au musée des antiques, une voûte elliptique, aux deux foyers de laquelle on a placé deux

[1] A l'oreille on peut d'ailleurs substituer une flamme sensible, ainsi que nous le verrons bientôt.

[2] La surface de l'eau réfléchit parfaitement le son : tous les bateliers savent que la voix porte beaucoup plus loin sur l'eau que sur la terre.

larges vases, permet à deux interlocuteurs parlant alternativement et écoutant dans ces vases, d'entretenir à voix basse une

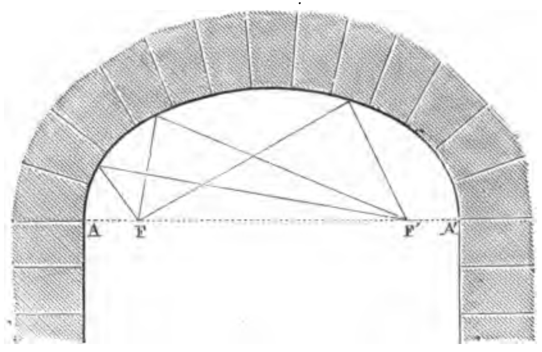


Fig. 39

conversation, sans être entendus des personnes voisines. En un certain endroit des caveaux du Panthéon, il suffit d'un coup de canne contre le pan d'une redingote pour faire éclater un bruit assourdissant.

Dans tout espace fermé, il doit y avoir et il y a de fait réflexion du son. Mais, d'une part, à cause de la persistance des impressions, l'oreille ne distinguera, en général, le son répété du son direct que s'il y a entre ces deux sons successifs un intervalle d'au moins 1/10 de seconde; par conséquent, pour qu'il y ait effectivement répétition du son ou *écho*, il faut que l'obstacle contre lequel s'effectue la réflexion soit au moins à 17 mètres, de façon que pour le trajet total, aller et retour, le son doive employer au moins 1/10 de seconde; sinon, il y aura simplement *résonnance*. D'autre part, la nature même des parois a une grande influence : des tapisseries épaisses étouffent le son; des boiseries élastiques le renvoient au contraire, en y ajoutant l'effet de leurs propres vibrations. Le son se trouve alors prolongé et renforcé. Dans une salle de réunion ce double effet peut aider la voix de l'orateur; mais une résonnance trop forte nuit à la perception distincte de la parole ([1]). On cite telle église où la voix du prédicateur n'est

([1]) La disposition qu'il convient de donner à une salle suivant ses dimensions et suivant l'usage auquel on la destine est une des questions les plus délicates de l'architecture. Voir à ce sujet Lachez, *Acoustique et optique des salles de réunion*. Paris; 1879.

intelligible qu'une fois par an, à la fête de Noël, les voûtes étant ce jour-là couvertes d'ornements qui en diminuent la sonorité habituelle.

Un obstacle situé à 17 mètres ne fait écho que pour un son absolument bref. Quand il s'agit de la parole, comme on ne prononce guère que 5 syllabes par seconde, et que, par conséquent, l'émission d'une syllabe dure 1/5 de seconde, pour donner la répétition nette d'un son articulé, sans empiètement sur le son direct, l'obstacle devra être éloigné d'au moins 34 mètres en ligne droite. A cette distance, l'écho sera *monosyllabique;* à une distance double, il sera *dissyllabique;* et ainsi de suite.

Deux obstacles disposés vis-à-vis l'un de l'autre, comme deux miroirs opposés, pourront se renvoyer le son un très grand nombre de fois, sans qu'il cesse d'être perceptible. Ces *échos multiples* ne sont pas rares; l'un des plus remarquables est celui de la villa Simonetta, près de Milan : un coup de pistolet tiré de l'une des fenêtres de la cour intérieure y est répété quarante à cinquante fois.

Échos aériens; opacité acoustique de l'atmosphère. — Un fait curieux d'écho est celui que M. Tyndall (¹) a eu l'occasion d'observer au cours d'expériences entreprises à South Foreland, près Douvres, pour étudier l'efficacité des signaux sonores sur les côtes maritimes, en cas de brouillard. Ces expériences, comme celles de M. Henry (²) en Amérique, donnèrent des résultats singulièrement variables : une atmosphère parfaitement transparente au point de vue optique peut être d'une opacité acoustique presque impénétrable. On conçoit, en effet, que si des masses considérables, bien qu'invisibles, de vapeur s'élèvent de la mer, elles feront obstacle à la transmission du son en créant dans l'atmosphère des couches hétérogènes, aux surfaces limites desquelles le son sera partiellement réfléchi. Pour vérifier cette manière de voir, M. Tyndall s'installa au pied du rocher en haut duquel étaient placés les appareils sonores, et il reconnut qu'effectivement l'écho se produisait au large avec une force considérable. Il institua ensuite dans son laboratoire des expériences décisives, parmi lesquelles

(¹) TYNDALL, *Phil. Trans.;* 1874; et *On Sound,* 284; 4th ed. London, Longmans; 1883.

(²) HENRY, *Report of the Lighthouse Board of U. S. for the year* 1874.

nous rapporterons la suivante, que l'on peut facilement reproduire. Une grille rectangulaire à gaz est disposée horizontalement; à l'une des extrémités est placé un petit tuyau à anche; une flamme sensible est à l'autre bout. On fait parler le tuyau. Le gaz n'est pas allumé, la flamme sensible s'agite; on allume le gaz, la flamme revient au repos; mais une deuxième flamme située derrière le tuyau, en un point où, l'onde directe ne pouvant l'atteindre, elle restait immobile quand le gaz n'était pas

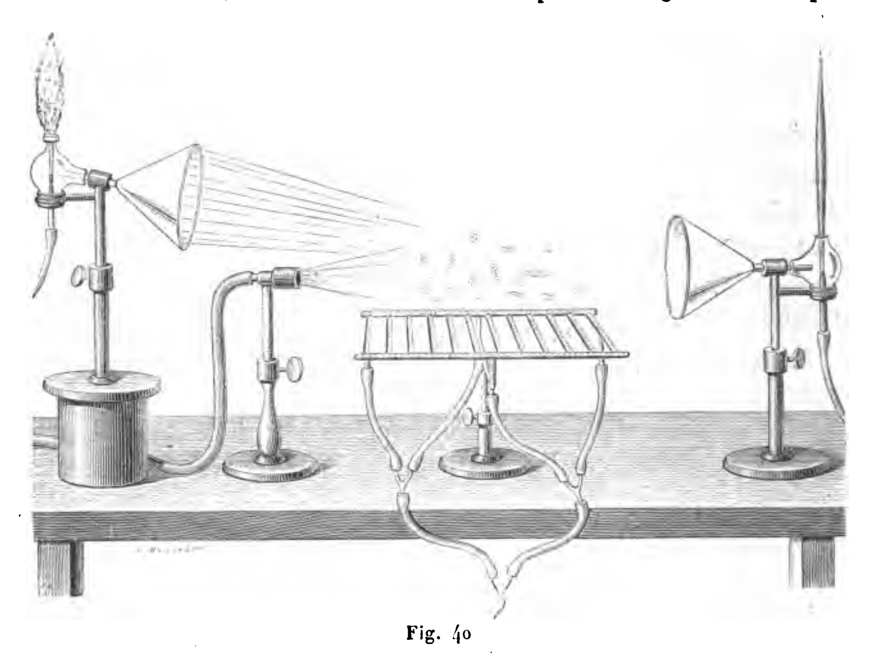


Fig. 40

allumé, vibre maintenant avec énergie. La couche d'air chaud s'élevant au-dessus de la grille allumée arrête donc le son et le renvoie en arrière, exactement comme dans les expériences à l'air libre.

Il est intéressant de rapprocher ces faits de l'observation du même savant relative à la transmission parfaite du son à travers une tourmente de neige, sur la mer de glace, pendant l'hiver de 1859. Le son passe avec une facilité extraordinaire par les interstices des corps solides; il traverse aisément douze foulards de soie superposés, tandis qu'un seul l'arrête complètement si, ayant été préalablement trempé dans l'eau, il forme un écran continu.

Les *porte-voix* et *cornets acoustiques* sont des applications immédiates de la réflexion du son, compliquée d'ailleurs d'effets de résonnance.

Réflexion du son à l'extrémité d'un tuyau cylindrique. — Parmi les nombreux phénomènes de réflexion sonore, il en est un que nous devons étudier en détail, tant à cause de son importance propre que par suite des conditions simples et bien déterminées dans lesquelles il a lieu : c'est la réflexion d'une onde plane au bout d'un tuyau limité par un fond solide, ou s'ouvrant librement à l'air.

Dans le premier cas, quand l'onde se réfléchit contre le fond solide d'un tuyau fermé, la réflexion se produit, comme à l'ordinaire, avec changement de signe dans la vitesse et sans changement de signe dans la condensation, l'ébranlement qui se propage en sens inverse restant condensant s'il était condensant, dilatant s'il était dilatant.

A l'extrémité d'un tuyau ouvert, les choses se passent tout différemment. Quand un ébranlement condensant arrive à l'extrémité libre, la dernière tranche d'air ne trouve plus devant elle la résistance qu'ont éprouvée successivement les tranches intérieures : l'air extérieur cédant de tous côtés, la tranche s'avance au delà de sa position d'équilibre, entraînant derrière elle, de proche en proche, les tranches contiguës. Un nouvel ébranlement prend donc naissance, ébranlement dilatant qui se propage dans le sens rétrograde, mais en conservant le sens direct du mouvement des tranches. Ainsi la réflexion s'est produite sans changement de signe de la vitesse et avec transformation de la condensation en dilatation.

D'ailleurs l'un des phénomènes entraîne l'autre : du moment qu'à une certaine époque x se change en $-x$, si $\frac{du}{dt}$ conserve son signe, $-\frac{du}{dx}$ en change, et réciproquement.

Dans la réflexion contre le fond supposé absolument résistant d'un tuyau fermé, la dernière tranche d'air doit satisfaire à la condition $u=0$ ou $\frac{du}{dt}=0$, ce que l'on ne peut obtenir qu'en superposant au mouvement direct un mouvement rétrograde de même amplitude avec changement du signe de la vitesse et, par suite, avec conservation du signe de la condensation.

A l'extrémité libre d'un tuyau ouvert, u n'est soumis à aucune condition non plus que $\frac{du}{dt}$, mais la pression ne saurait différer sensiblement de la pression atmosphérique actuelle : ainsi la condensation est très petite, et l'on a sensiblement $\frac{du}{dx}=0$. Au mouvement direct doit donc se superposer un mouvement rétrograde tel qu'à l'extrémité la compression de l'un compense la dilatation de l'autre; en d'autres termes, il doit y avoir changement du signe de la condensation, et par conséquent conservation du signe de la vitesse.

Analytiquement, le cas d'un tuyau limité peut se ramener au cas précédemment étudié d'un tuyau illimité (344), si l'on dispose de l'état initial de toute la partie ajoutée, de façon qu'en abandonnant ensuite le système total à lui-même, les conditions physiques qui existaient aux limites se trouvent remplies d'elles-mêmes à chaque instant.

Soit, par exemple, un tuyau limité dans un sens par un fond rigide. La tranche d'air contiguë doit rester immobile. On doit donc avoir, à toute époque, $\frac{du}{dt}=0$ pour $x=0$, en comptant les abscisses à partir du plan fixe (positivement du côté directement ébranlé), ou, d'après la valeur générale de la vitesse,

$$f'(at)-F'(-at)=0,$$

ou, comme cette relation doit avoir lieu quel que soit t,

$$F'(-z)=f'(z),$$

ou encore, si l'on change z en $-z$,

$$f'(-z)=F'(z).$$

Les deux fonctions f' et F' sont donc connues pour toutes les valeurs négatives de la variable; et la question est résolue. On peut supprimer le fond si l'on attribue à la masse de gaz contenue dans la portion négative du tuyau un mouvement satisfaisant aux deux conditions précédentes. Ces conditions entraînent une consé-

quence immédiate. Calculons la vitesse et la condensation pour une tranche quelconque de la partie négative : les formules générales donnent, par le changement de x en $-x$,

$$v_1 = af'(-x+at) - aF'(-x-at) = aF'(x-at) - af'(x+at) = -v$$

et

$$\gamma_1 = -f'(-x+at) - F'(-x-at) = -F'(x-at) - f'(x+at) = \gamma.$$

Donc, comme il était facile de le prévoir, si l'on attribue aux tranches situées à la même distance de part et d'autre de l'origine, des vitesses égales et de signes contraires avec des condensations identiques, la tranche à l'origine restera perpétuellement en repos.

Si maintenant nous considérons dans la partie positive un ébranlement limité, compris entre d et $d+l$, nous devrons imaginer dans la partie négative, entre $-d$ et $-(d+l)$, un ébranlement à vitesses égales et opposées et à condensations identiques. Chacun de ces ébranlements donnera naissance à une onde se propageant vers l'origine avec la vitesse a. Lorsque l'onde positive arrivera à l'origine, l'onde négative y arrivera également, et ces deux ondes, continuant leur marche, se pénétreront réciproquement. D'où il résulte que dans le tuyau limité les choses se passeront comme si l'onde directe, arrivée au plan fixe, se repliait sur elle-même, en se superposant aux parties qui marchent encore vers ce plan ; et lorsque la seconde extrémité de l'onde positive atteindra le fond, l'onde entière se trouvera retournée et prête à se propager en sens inverse.

On traiterait de même aisément le cas d'un tuyau s'ouvrant librement dans l'atmosphère, et l'on reconnaîtrait qu'en ce cas les choses se passent comme si l'onde directe éprouvait contre l'air extérieur le mode de réflexion que nous avons défini plus haut.

351. Réfraction du son. — En passant d'un milieu dans un autre, le son se réfracte comme la lumière, suivant la loi de Descartes, l'indice de réfraction d'un corps par rapport à l'air étant égal

au rapport des vitesses de propagation du son dans l'air et dans le corps. Sondhauss (1) en a fourni la preuve expérimentale au moyen d'une lentille creuse, en collodion, remplie d'acide carbonique : ce gaz étant plus lourd que l'air, un son émanant d'un point S,

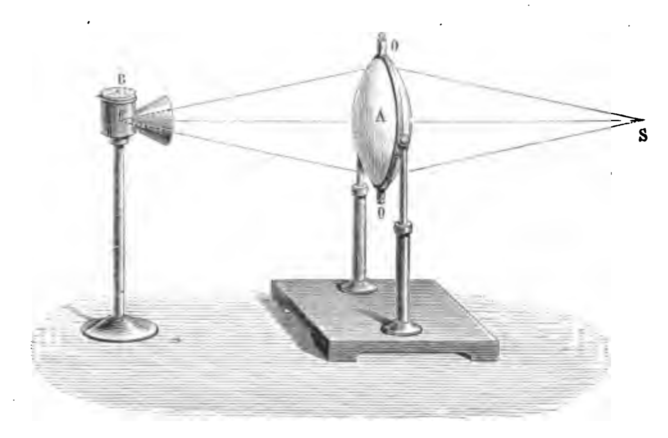


Fig. 41

situé à une certaine distance sur l'axe, venait se concentrer au foyer conjugué F, où l'on pouvait le constater soit à l'oreille, soit au moyen d'une membrane B, recouverte de sable.

M. Hajech (2) a fait des mesures précises à l'aide d'un tube-prisme, semblable à ceux que l'on emploie en optique pour étudier la réfringence des gaz. Ce tube traversait le mur de séparation de deux pièces : dans l'une était installée la source sonore, en face du tube fermé de ce côté par une membrane normale à l'axe ; dans l'autre se tenait l'opérateur au-dessus d'un cercle gradué tracé sur le parquet ; l'expérience consistait à déterminer la direction du rayon réfracté pour une inclinaison donnée de la membrane de sortie, le tube étant rempli d'un fluide connu. Le tableau suivant renferme quelques-uns des résultats obtenus ; on remarquera que l'eau, dans laquelle la vitesse de propagation est sensiblement la même que dans l'hydrogène, produit aussi des déviations à peu près égales :

(1) Sondhauss, *Pogg. Ann.*, LXXXV, 378 ; 1852.

(2) Hajech, *Nuovo Cimento*, 1857 ; et *Ann. de chim. et de phys.* (3), LIV, 438 ; 1859.

	Angle d'incidence.	Angle de réfraction Observé.	Angle de réfraction Calculé.
Eau	35°50′	7°40′	7°58′
	25 00	5 40	5 37
Hydrogène	35 50	8 00	8 50
	25 00	7 00	6 22
Ammoniaque	41 00	29 20	30 22
	35 50	25 00	26 50
Acide carbonique	35 50	49 50	48 19
	25 00	33 20	32 33
Acide sulfureux	35 50	62 30	61 22
	25 00	40 00	39 24

352. Applications. — La vitesse du son dans l'air étant connue, on peut s'en servir pour mesurer approximativement une distance : on observe l'intervalle de temps entre l'éclair et le bruit du tonnerre, entre la lueur et le bruit d'un coup de feu; chaque seconde représente, à la température ordinaire, environ 340 mètres.

Newton donne une formule pour calculer la profondeur x d'un puits d'après le temps t écoulé entre l'instant où on lâche une pierre à l'orifice du puits et celui où l'on perçoit le son qu'elle rend en frappant l'eau :

$$t=\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{a},$$

formule dans laquelle on fera $g=9{,}81$ et $a=340$, le temps étant exprimé en secondes, les longueurs en mètres.

Arago avait proposé d'évaluer la profondeur d'un lac ou d'une mer par le retour du son réfléchi sur le fond. Colladon fit à ce sujet, sur le lac de Genève, une série d'expériences d'où il résulte qu'un son intense s'entend sous l'eau à plus de 100 kilomètres; mais il ne dit rien de la possibilité de mesurer la profondeur par un écho du fond.

CHAPITRE IV

INTERFÉRENCES DU SON

353. Superposition des ondes sonores. — Les ondes liquides nous ont déjà maintes fois servi de terme de comparaison, Une pierre jetée dans l'eau fait apparaître à la surface des rides circulaires qui s'étendent au large ou rebondissent contre les obstacles, en donnant la représentation exacte de la propagation ou de la réflexion des ondes sonores. Deux pierres, lancées en même temps dans l'eau, provoqueront deux systèmes d'ondes qui se couperont, et qui cependant poursuivront leur route, chacun aussi tranquillement et aussi régulièrement que si l'autre n'existait pas. En général, quelle que soit la complication des ondes produites à la surface de l'eau, grandes vagues soulevées par la tempête, étroit sillage d'un navire, petites rides excitées par la pointe de l'aile d'un oiseau, l'œil suivra sans peine l'un quelconque de ces mouvements, chaque système se développant exactement comme si la surface liquide n'était pas en même temps le siège d'autres mouvements analogues.

Quand deux systèmes d'ondes se propagent simultanément, les élévations et les dépressions de l'un d'eux, relativement à la surface agitée déjà par l'autre, étant les mêmes que celles qui se constateraient sur une eau tranquille, l'élévation ou la dépression totale à partir du niveau primitif est en chaque point et à chaque instant égale à la somme algébrique des déplacements que chacun des systèmes amènerait isolément. Si à une élévation du premier système se superpose une élévation égale du second, la hauteur totale de l'eau au-dessus de son niveau primitif sera le double de l'une des deux hauteurs isolées. Si une élévation du premier système se rencontre

avec une dépression égale et opposée du second, le niveau primitif ne sera pas modifié.

Semblablement, quand plusieurs systèmes d'ondes sonores coexistent dans un même milieu, il y a en chaque point et à chaque instant addition des petits mouvements afférents à chacun des systèmes, en d'autres termes, il y a *interférence*.

354. Principe des interférences. — Considérons en particulier deux sources sonores A et B identiques, c'est-à-dire telles que les mouvements vibratoires soient à chaque instant égaux et de même sens; il est clair qu'en tout point du plan PP', perpendicu-

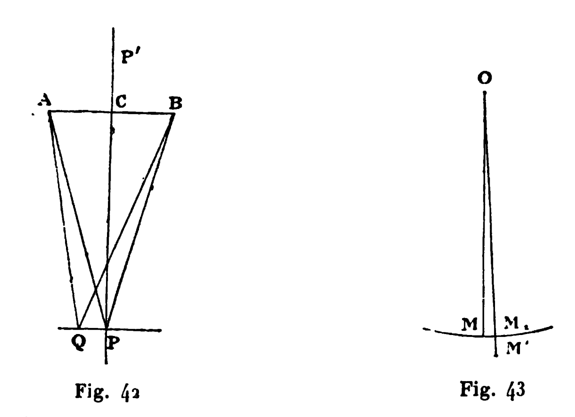


Fig. 42 Fig. 43

laire sur le milieu de la droite AB, les mouvements provoqués par chacun des deux systèmes d'onde seront à chaque instant concordants : la vitesse, comme le déplacement, se trouvera plus grande qu'elle ne le serait dans le cas d'une source unique : plus grande par conséquent sera l'intensité (326).

Dans un plan quelconque mené par AB, la vitesse, et par suite l'intensité, présentera une série de maxima et de minima fixes.

Pour se rendre un compte exact de toutes les circonstances du phénomène, il suffit de supposer que le mouvement vibratoire auquel est dû le son est décomposable d'une infinité de façons en demi-vibrations exactement contraires. Alors, en effet, si l'on considère assez loin du centre d'ébranlement O deux points M et M', situés à peu de distance l'un de l'autre sur un même rayon ou sur des rayons suffisamment voisins, les modifications quelconques

qu'a éprouvées le mouvement de O en M ou de O en M′ pouvant être regardées comme identiques, les vitesses v et v' des deux points seront à tout instant égales, parallèles et de même sens, si la différence des distances OM′ et OM au centre d'ébranlement est un multiple pair de la demi-longueur d'onde. Les vitesses seront à tout instant égales, parallèles et de sens contraire, si la différence des distances OM′ et OM est un multiple impair de la demi-longueur d'onde. En d'autres termes,

$$\text{si} \quad OM' - OM = 2k\frac{\lambda}{2} \qquad \text{on a} \quad v' = v,$$

$$OM' - OM = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \qquad v' = -v,$$

k étant un nombre entier quelconque 0, 1, 2, 3,...

D'après cela, quand les mouvements émanés de deux sources identiques A et B viennent se rencontrer en un point Q, les vitesses s'ajoutent ou se retranchent géométriquement suivant que la différence QB — QA est égale à $2k\frac{\lambda}{2}$ ou à $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$. Le lieu des maxima dans le plan APQ est donc représenté par la série des hyperboles

$$QB - QA = 2k\frac{\lambda}{2},$$

et le lieu des minima par la série des hyperboles

$$Q'B - Q'A = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

On obtiendra les intensités des maxima et des minima en composant suivant la règle ordinaire les vitesses des deux mouvements constituants, et en se rappelant que les intensités sont proportionnelles au carré des vitesses.

Si le point Q est assez éloigné des points A et B pour que les droites QA, QB, puissent être considérées comme sensiblement parallèles, les vitesses s'ajoutent algébriquement; et, puisqu'elles

sont égales en valeur absolue, on voit qu'alors l'intensité est 4 aux maxima et o aux minima, tandis qu'elle serait 2 partout si l'intensité résultante était simplement la somme arithmétique des intensités composantes. Ainsi, deux sons émanant de deux centres identiques

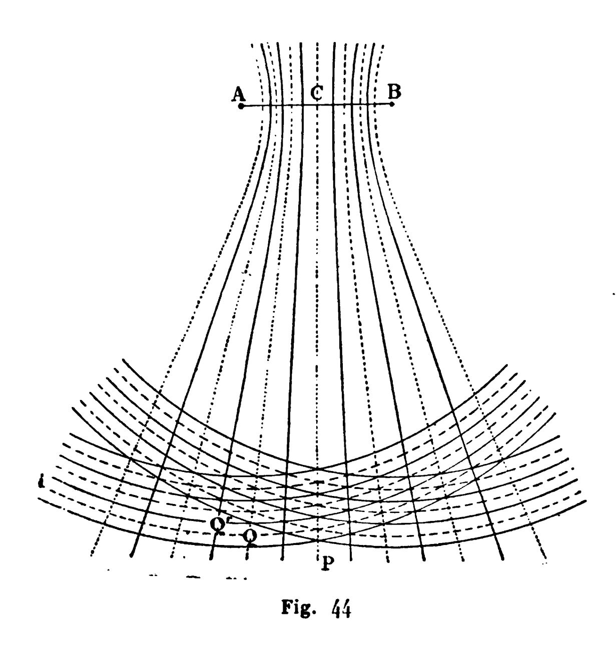


Fig. 44

se renforceront en certains points de l'espace, se détruiront au contraire en d'autres, où le son s'ajoutant au son produira le silence.

355. Expériences établissant l'interférence des ondes sonores. — *Expériences de Despretz; appareil de Desains.* — Despretz avait cherché à vérifier ces conséquences au moyen de deux sifflets montés sur une même soufflerie. Desains [1] a employé un appareil plus exact : une boîte ABCD, ouatée intérieurement pour empêcher toute réflexion sonore, porte perpendiculairement à sa base AB un fort sifflet S, tandis que la face supérieure est percée de deux trous O et O', symétriquement placés par rapport à la verticale S. Le sifflet recevant l'air par le tube T, les deux orifices O et O'

[1] Desains, *Leçons de physique*, II, 45. Paris, Desobry; 1860.

constituent deux sources identiques; et si l'on promène au-dessus une petite membrane couverte de sable, on constate aisément que le sable est vivement agité aux points où la théorie indique des maxima. Il reste au contraire immobile, ou à peu près, dans la région

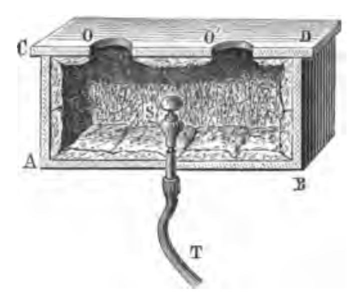


Fig. 45

des minima ; et quand la membrane est ainsi en un de ces points de repos, il suffit de fermer l'un des deux trous pour voir aussitôt le sable entrer en mouvement.

Expériences d'Hopkins. — Les plaques vibrantes se prêtent très bien aux expériences de ce genre, comme l'a montré Hopkins [1].

Soit par exemple une plaque P qui, attaquée convenablement avec l'archet, se partage en quatre secteurs vibrants, séparés par deux lignes nodales immobiles, à angle droit. Soit encore un sys-

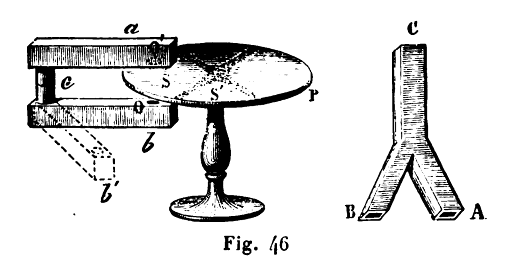


Fig. 46

tème de deux tuyaux *a* et *b*, ouverts en O et O′, et réunis à l'autre bout par un conduit transversal *c*, autour duquel ils peuvent tourner. Chacun des deux tuyaux *a* et *b* a été réglé isolément de façon à renforcer le son de la plaque : si donc on dispose l'un de ces tuyaux *a* au-dessus de l'un des secteurs vibrants S, l'autre tuyau étant écarté

[1] Hopkins, *Cambridge Phil. Trans.*, V, pt. 2, 231 ; 1835.

en b', le son est renforcé; mais si l'on amène le deuxième tuyau en b, sous le premier, l'effet disparaît. On comprend aisément qu'il doit en être ainsi, car le secteur S marchant vers O' s'éloigne de O et *vice versâ*, de sorte que les vitesses de l'air en O et O' sont toujours égales et contraires.

Dans une plaque vibrante, les mouvements de deux secteurs consécutifs S et S' sont constamment opposés : quand le secteur S s'élève, le secteur S' s'abaisse, et réciproquement. Si donc nous prenons un tuyau ABC, en forme d'Y renversé et de dimensions convenables pour renforcer le son de la plaque, et que nous placions d'abord une seule ouverture A au-dessus d'un secteur quelconque S, le son sera effectivement renforcé. Mais si nous mettons à la fois les deux ouvertures A et B au-dessus de deux secteurs voisins S et S', le tuyau ne renforcera plus le son (¹).

Expérience de Lissajous (²). — Lissajous a appliqué le même

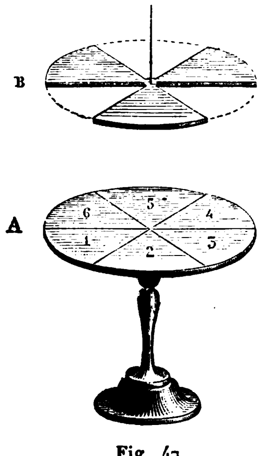


Fig. 47

principe sous une forme très élégante. La plaque A vibrant, je suppose, en six secteurs séparés par trois lignes nodales diamétrales, il approche de cette plaque un disque B découpé en six secteurs égaux, alternativement vides et pleins. Si ce disque est placé de

(¹) On peut aussi mettre en C une membrane sur laquelle le sable sautera ou restera immobile suivant la position des branches des tuyaux.

(²) Lissajous, C. R., XL, 133; 1855.

façon à masquer sur la plaque exactement trois secteurs de même parité, les actions concordantes des trois autres secteurs n'étant plus contrariées par les premières, le son sera considérablement renforcé. Au contraire il n'y a pas de renforcement quand le disque laisse à découvert des portions égales de tous les secteurs. De sorte que si l'on fait tourner le disque au-dessus de la plaque, il en résulte une série de renforcements énergiques, qui sont encore saisis distinctement alors que le son de la plaque entière n'est plus perceptible. L'expérience peut même se faire simplement avec les deux mains, tour à tour approchées ou éloignées de deux secteurs de même parité.

Phénomènes offerts par un diapason. — Tout le monde sait le peu d'intensité du son produit par un diapason tenu librement à

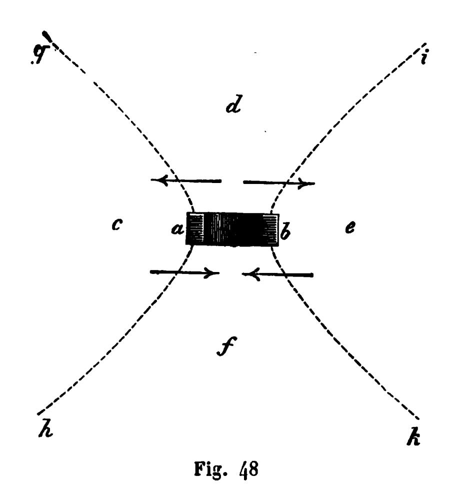


Fig. 48

a main. C'est qu'en effet, les deux branches d'un diapason se rapprochant ou s'éloignant toutes deux l'une de l'autre, les mouvements communiqués à l'air se contrarient sans cesse. Lorsqu'on tient le diapason près de l'oreille, ou qu'on le place au-dessus d'une éprouvette servant de résonnateur, on reconnaît que le son, assez fort dans les régions *d* et *f*, moins intense en *c* et *e*, disparaît complètement sur les branches de l'hyperbole *gah ibk*, ainsi que l'ont démontré les frères Weber ([1]). Si donc on fait tourner le

([1]) Weber, *loc. cit.*, 506. Le phénomène a été étudié en détail par M. Kiessling, *Pogg. Ann.*, CXXX, 177 ; 1867.

diapason sur lui-même, on constate une succession de renflements et d'affaiblissements; et, quand l'instrument est dans une position telle que le mouvement résultant soit éteint, il suffit pour faire reparaître le son d'entourer l'une des branches d'un bout de tube qui en intercepte les vibrations. En thèse générale, l'effet d'un pareil tube est de grossir le son; l'expérience de Lissajous sur la plaque peut ainsi être répétée sur le diapason.

Vibration simultanée de deux tuyaux à l'unisson montés sur une même soufflerie; tuyaux à flammes manométriques de Kœnig. —

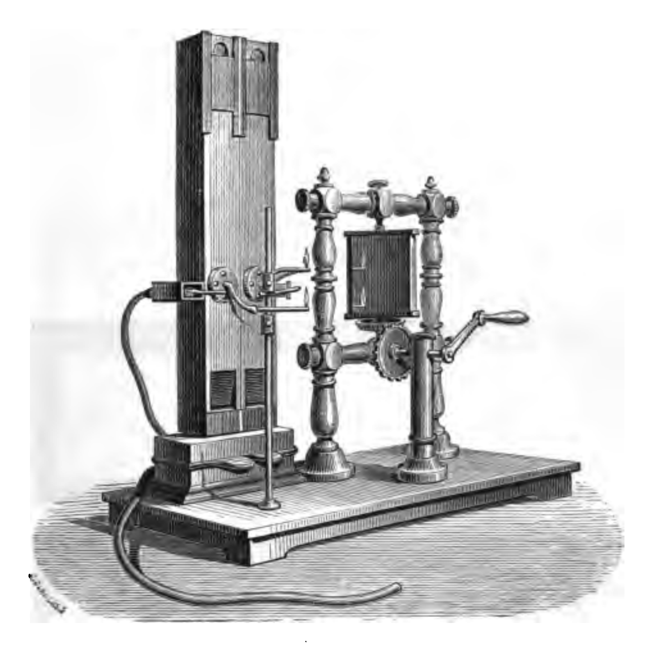


Fig. 49

Voici un autre fait bien connu des musiciens : deux tuyaux à l'unisson, placés l'un à côté de l'autre sur une même soufflerie, au lieu de produire ensemble une intensité double, ne donnent qu'un son très affaibli [1]. La raison en est que dans ces conditions les mouvements vibratoires de deux tuyaux identiques diffèrent constamment d'une demi-période, comme le montrent les flammes manométriques de Kœnig.

[1] Par contre, on commence à entendre distinctement l'octave.

Ces flammes, d'un emploi avantageux dans maintes circonstances ([1]), sont obtenues de la manière suivante. A un nœud du tuyau (359), là où les condensations et les dilatations de l'air attei-

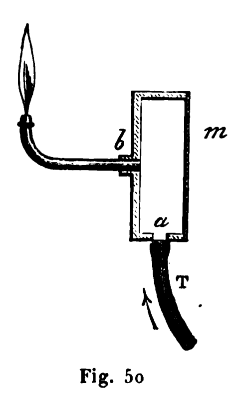


Fig. 50

gnent leur maximum, on remplace une portion de la paroi par une membrane élastique *m*; sur cette membrane repose une cap-

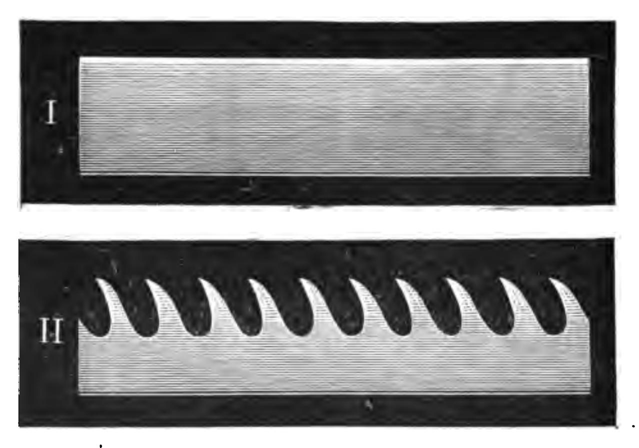


Fig. 51

sule *ab*, que traverse un courant de gaz d'éclairage, arrivant par le tuyau T et la tubulure *a*, et sortant par la tubulure *b* à l'extré-

([1]) Le premier appareil réalisant ce moyen de rendre sensible à l'œil les ondes sonores dans les gaz parut à l'Exposition de Londres en 1862; depuis cette époque, M. Kœnig a construit sur le même principe toute une série d'appareils (Kœnig, *loc. cit.*, 47).

mité de laquelle on l'allume. A chaque vibration de l'air dans le tuyau, la membrane, repoussée puis attirée, comprime et raréfie tour à tour le gaz dans la capsule manométrique : la flamme s'allonge et se raccourcit par un mouvement synchrone à celui de l'air intérieur. Mais ces saccades de la flamme ne se traduisent au regard que par un léger trouble, résultant de la superposition rapide des différentes formes du jet. Pour les voir isolément, il faut agiter vivement la tête tout en regardant la flamme, ou mieux, en observer l'image dans un miroir tournant. Quand le tuyau est muet, l'image de la flamme est un ruban continu et uniforme (I); quand le tuyau résonne, elle offre une série de dentelures correspondant aux vibrations sonores (II).

Les deux tuyaux de la figure 48 donnent ainsi deux images sur

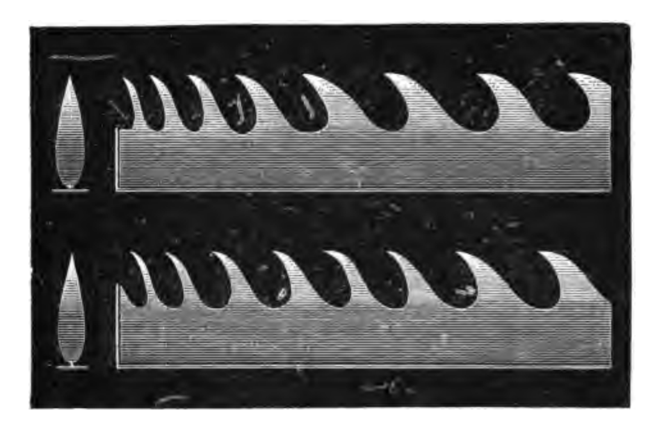


Fig. 52

lesquelles les dentelures alternent exactement [1] : les deux mouvements vibratoires sont donc constamment opposés.

Expériences avec la sirène double d'Helmholtz. — Un appareil se prêtant très bien à l'observation des phénomènes d'interférence est la sirène double de M. von Helmholtz. Elle se compose de deux

[1] Sur la figure 52, on a d'abord supposé le miroir immobile : les flammes offrent alors l'aspect indiqué à gauche; puis le miroir reçoit un mouvement qui va en s'accélérant, les images se séparent de plus en plus et montrent l'alternance indiquée. Si on réunit les deux capsules en une même flamme, celle-ci apparaît comme un ruban uniforme, frangé toutefois sur son bord supérieur de dentelures très basses, à deux sommets, accusant l'octave.

sirènes polyphones, dont les caisses à vent a_0 et a_1 sont installées l'une au-dessus de l'autre sur un support commun; les disques sont fixés sur un même arbre portant en *k* une vis sans fin qui mène le compteur (non représenté sur la figure). La caisse supérieure elle-même peut tourner autour de son axe : à cet effet, elle est sur-



Fig. 53

montée d'une roue dentée qui engrène avec une autre roue plus petite *e*, munie d'une manivelle *d*. Chacun des disques est percé de plusieurs séries de trous qui reçoivent l'air (sous pression) isolément ou simultanément par un jeu convenable des chevilles *ii* : le disque inférieur comprend quatre séries de 8, 10, 12, 18 trous; le

disque supérieur, quatre autres de 9, 12, 15, 16; si donc on appelle ut_1 le son de 8 trous, le disque inférieur peut donner ut_1, mi_1, sol_1, $ré_2$, et le disque supérieur $ré_1$, sol_1, si_1, ut_2, ce qui permet des combinaisons variées ([1]). Les sons produits par la sirène seule sont aigres, à cause de la présence de tons supérieurs en dehors de la série harmonique. Pour étouffer ces tons isolés, M. von Helmholtz renforce les harmoniques naturels au moyen de tuyaux en laiton, dont les moitiés postérieures sont figurées en h_0h_0, h_1h_1. Le son émis par la sirène « devient alors plein, fort et harmonieux comme un beau son de cor »; en d'autres termes, il ne contient plus sensiblement qu'un son fondamental et la série des harmoniques naturels. Cela étant, livrons passage aux sons 12 dans chaque caisse : si celles-ci sont disposées de manière que les trous soient en regard, les impulsions sont exactement concordantes, la différence est 0 pour les sons fondamentaux et pour leurs harmoniques : ils sont tous renforcés. Tournons la manivelle de 45°, ce qui fera avancer la caisse supérieure de 1/24 de tour, soit de la moitié de la distance de deux trous, les deux sons fondamentaux présenteront une différence d'une demi-période : ils se détruiront. Mais les octaves supérieures différeront alors d'une période entière, et par suite elles se renforceront; il en sera de même de tous les harmoniques pairs, tandis que les harmoniques impairs se neutraliseront. Dans cette position, le son sera donc très affaibli, sans être complètement éteint ; il sera plutôt porté à l'octave. Tournons la manivelle d'un nouvel angle de 45°, l'accord sera rétabli pour tous les éléments du son, qui se renforceront tous. Un tour entier de la manivelle offrira donc quatre positions où le son sera renforcé dans tous ses éléments, et quatre autres, intermédiaires, où le son fondamental et tous les harmoniques disparaissant, le son sera considérablement affaibli et en même temps haussé d'une octave.

Superposition directe de deux sons présentant une différence de marche connue. — Le moyen qui apparaît naturellement pour produire l'interférence de deux mouvements vibratoires consiste à établir entre deux ondes sonores émanant de la même source

([1]) La sirène double est particulièrement commode pour vérifier que l'intervalle de deux sons ne dépend que du rapport de leurs nombres de vibrations et nullement de la valeur absolue de ces nombres.

ne différence de marche d'une demi-longueur d'onde. Herschell (¹), le premier, Quincke (²) ensuite, et d'autres physiciens, ont employé ce procédé. Nous décrirons seulement l'appareil

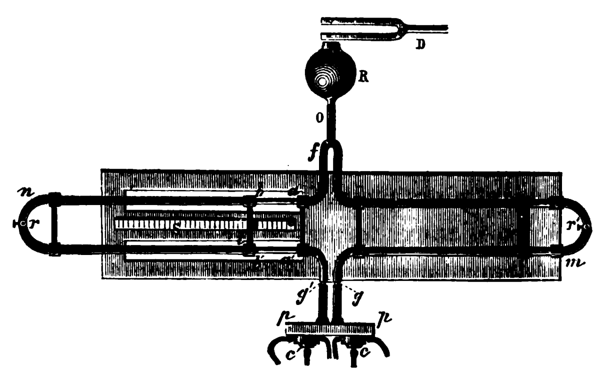


Fig. 54

construit par M. Kœnig pour réaliser facilement l'expérience. Un tuyau O, recevant par l'intermédiaire d'un résonnateur R le son

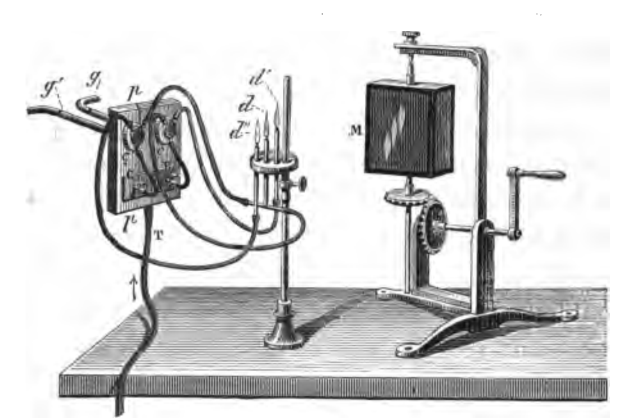


Fig. 55

d'un diapason D, se bifurque au point f en deux branches m et n, qui viennent aboutir en g et g' aux capsules manométriques c et c'. La branche n, formée de deux tuyaux emboîtés aa', bb', peut

(¹) Herschell, *Phil. Mag.* (3), III, 405 ; 1833.

(²) Quincke, *Pogg. Ann.*, CXXVIII, 177; 1866. Voir au sujet des expériences de Quincke, Seebeck, *Pogg. Ann.*, CXLIX, 129 ; 1873 ; et *Journal de physique*, III, 127; 1874 (Terquem).

s'allonger à la manière d'un trombone. Quand le tuyau *b* recouvre entièrement le tuyau *a*, les deux branches *m* et *n* sont égales, les mouvements vibratoires transmis en *c* et *c'* concordent exactement. Si donc on superpose ces deux mouvements en *d*, la flamme *d* montrera de profondes dentelures en accord avec celles des flammes *d'* et *d''* qui se rapportent aux mouvements composants, et les trois séries de dentelures se correspondront sur les mêmes verticales (I). Si au contraire la branche *n* est allongée de la moitié de la longueur d'ondulation dans l'air du son D (on tire à cet effet le tuyau *b* de façon que la traverse *t* avance sur l'échelle S du

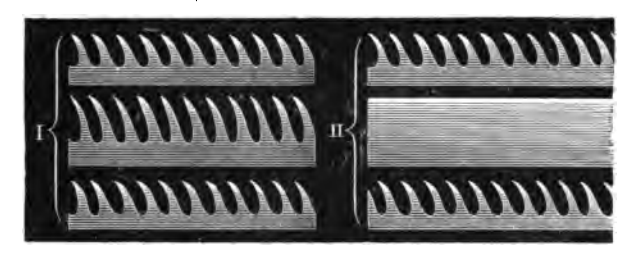


Fig. 56

quart de cette longueur), les mouvements en *c* et *c'* seront opposés : la flamme *d* restera immobile, tandis que les dentelures alterneront en *d'* et *d''* (II). La différence de marche étant portée à une longueur d'onde, l'accord reparaît (I) ; et ainsi de suite.

Avec une membrane ajoutée en O et des robinets placés en *r* et *r'*, on peut opérer sur des gaz autres que l'air, et mesurer ainsi sur différents gaz la longueur d'onde λ d'un son donné.

Mesure de la vitesse du son dans un gaz par la méthode interférentielle. — Une fois λ connu, la formule fondamentale (349)

$$\lambda = V\tau$$

permet de calculer V. C'est là un moyen indirect de mesurer la vitesse du son dans un gaz.

M. Schneebeli [1] a suivi cette méthode pour mesurer la vitesse de propagation du son dans l'air. Son appareil était constitué par un

(1) SCHNEEBELI, *loc. cit*

tube en forme de T dont les deux branches latérales se terminaient par deux poires de caoutchouc que l'on mettait en communication, l'une avec l'oreille, l'autre avec la source sonore, c'est-à-dire ici la caisse de résonnance d'un diapason de période connue τ. En modifiant à l'aide d'un piston la longueur de la grande branche, on cherchait à rendre la sensation minimum. La distance de deux positions consécutives du piston pour lesquelles le son était réduit au minimum donnait $\frac{\lambda}{2}$. On pouvait donc déterminer ainsi la vitesse U relative au son et au tube employés. Or (p. 68, *note*), si l'on compare deux expériences faites avec le même son sur deux tubes de rayons différents R_1 et R_2, on pourra poser, en désignant par A une constante,

$$U_1 = V\left(1 - \frac{A}{R_1}\right)$$

et

$$U_2 = V\left(1 - \frac{A}{R_2}\right),$$

d'où l'on tirera

$$V = \frac{U_1 R_1 - U_2 R_2}{R_1 - R_2}.$$

En groupant ainsi ses expériences deux à deux, M. Schneebeli a dressé un tableau renfermant trente-deux déterminations de V : ces valeurs oscillent entre 330^m et 333^m : la moyenne est 332^m.

356. Interférence des ondes directes et des ondes réfléchies. — *Superposition du mouvement direct et du mouvement réfléchi.* — Quand un système d'ondes émanant du point O se réfléchit contre un obstacle AB, un nouveau système d'ondes apparaît, ayant pour centre le point O', symétrique de O par rapport à AB; et la superposition des deux systèmes d'ondes donne lieu à des phénomènes d'interférence dont il est aisé de se rendre compte. Soit d la distance OC de la source au plan réfléchissant AB; en un point M, situé sur la normale OO' à une distance $CM = x$ de AB, viennent se superposer deux mouvements de même période,

ayant parcouru respectivement les chemins $O'M = d + x$ et $OM = d - x$, présentant par conséquent une différence géométrique $2x$; et, comme les mouvements qui se superposent ici sont de signes contraires, suivant que la quantité $2x$ sera égale à un multiple pair ou impair de la demi-longueur d'onde, il y aura minimum ou maximum. L'énoncé habituel est renversé; mais il est facile de faire rentrer le phénomène dans la règle générale si l'on remarque que l'inversion due à la réflexion résulterait également d'une augmentation de $\frac{\lambda}{2}$ sur le chemin parcouru par le deuxième mouvement. Si donc on admet qu'il y a *perte d'une demi-longueur d'onde*

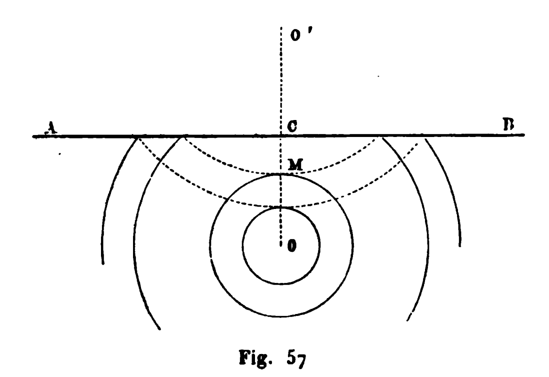


Fig. 57

dans la réflexion contre un obstacle inébranlable, la différence physique des chemins parcourus est $2x + \frac{\lambda}{2}$; et selon que cette différence $2x + \frac{\lambda}{2}$ sera égale à un multiple pair ou à un multiple impair de la demi-longueur d'onde, on aura en M un maximum ou un minimum. Ainsi, il se produira sur la normale une série de *nœuds* fixes, placés aux distances

$$0 \qquad 2\frac{\lambda}{4} \qquad 4\frac{\lambda}{4} \qquad 6\frac{\lambda}{4} \qquad \ldots$$

et une série de *ventres* fixes, aux distances

$$\frac{\lambda}{4} \qquad 3\frac{\lambda}{4} \qquad 5\frac{\lambda}{4} \qquad \ldots$$

Aux nœuds, la vitesse ne sera pas nulle, l'amplitude du mouvement réfléchi étant inférieure à celle du mouvement direct, mais le son sera très affaibli ; aux ventres, l'intensité sera maximum.

Si le point considéré M est en dehors de la normale OO′, il y a encore minimum ou maximum suivant que la différence des distances O′M et OM est un multiple pair ou impair de $\frac{\lambda}{2}$. Les surfaces nodales et ventrales sont donc des hyperboloïdes de révolution, ayant pour foyers O, O′, et dont les portions voisines de la ligne OO′ diffèrent peu de plans parallèles à AB.

Expériences de N. Savart (¹) *et de Seebeck* (²). — Ces phénomènes ont été étudiés expérimentalement par le colonel Nicolas Savart, frère du grand acousticien, et par Seebeck. Un mur vertical constituait l'obstacle devant lequel le son était produit au moyen d'une contrebasse ou d'un puissant tuyau d'orgue. Pour fixer la position des nœuds et des ventres, Seebeck se servit d'une membrane *mn*, tendue sur un cadre AB et munie d'un pendule léger *p*. En promenant ce *pendule acoustique* le long de CO, il put déterminer exactement les points cherchés et montrer que leur place était bien celle qui répondait à la théorie. N. Savart, au contraire, avait trouvé des nœuds là où le calcul indique des ventres et *vice versa*. La cause de ce désaccord tient à ce que N. Savart se servait de l'oreille pour déterminer les nœuds et les ventres. Or, tandis que dans l'expérience de Seebeck la membrane, en contact par ses deux faces avec l'air ambiant, accuse les mouvements de la couche où elle se trouve, le tympan, sollicité seulement sur sa face externe par l'onde sonore, subit les variations périodiques de pression dont un nœud est le siège, mais n'éprouve aucun effet au ventre : il se comporte exactement comme une capsule manométrique de Kœnig, ainsi que M. Kœnig lui-même l'a fait remarquer.

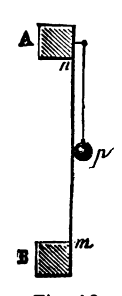


Fig. 58

Applications. — C'est essentiellement de l'interférence des ondes directes et des ondes réfléchies que résulte le jeu des plus puissants

(¹) SAVART, *Ann. de chim. et de phys.* (2), LXXI, 20, et (3), XIV, 385 ; 1839-45.

(²) SEEBECK, *Pogg. Ann.*, XLIX, 177 et LXVII, 145 ; 1840-46 ; et *Ann. de chim. et de phys.* (3), XVII, 490 ; 1846.

instruments de musique. Mais les phénomènes d'interférence ne se limitent pas aux appareils d'acoustique; ils se produisent dans toute enceinte fermée par des parois réfléchissantes : les architectes doivent donc en tenir grand compte pour la construction d'une salle de spectacle, d'un amphithéâtre, d'un lieu quelconque de réunion.

357. Traduction analytique du principe des interférences. — *Équations propres à représenter le mouvement vibratoire.* — Pour donner lieu au phénomène des interférences, il suffit, comme nous l'avons déjà remarqué, que le mouvement vibratoire auquel est dû le son soit une fonction périodique du temps qui reprenne des valeurs égales aux époques t, $t+\tau$, $t+2\tau$, ... et des valeurs égales et de signes contraires aux époques $t+\frac{\tau}{2}$, $t+\frac{3\tau}{2}$ ...

Il y a évidemment une infinité de fonctions satisfaisant à cette double condition. Imaginons, en effet, que, portant les temps en abscisses, et les déplacements en ordonnées, on trace à volonté

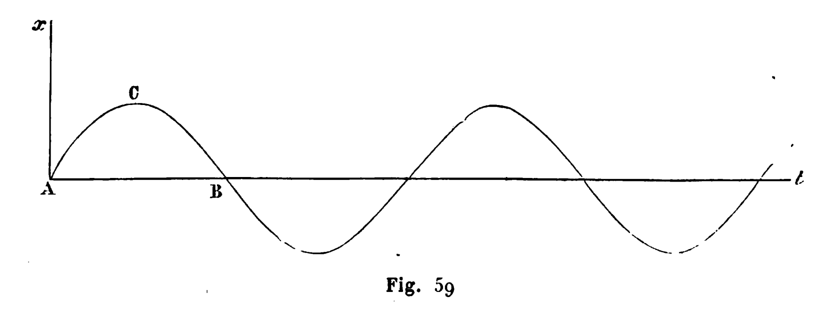


Fig. 59

un premier arc de courbe ACB, formé de deux portions symétriques, AC, CB, et qu'on reproduise ensuite cet arc à la suite de AB alternativement au-dessous et au-dessus de l'axe des x, indéfiniment; on aura ainsi une courbe répondant à une fonction périodique qui jouira des propriétés demandées.

Mais les mouvements moléculaires provoquant les phénomènes sonores ne sont pas quelconques. Ils proviennent des forces mises en jeu par la déformation. Si cette déformation est assez faible, la résultante des forces élastiques agissant sur un point matériel est proportionnelle à l'écart (135); par suite, le mouvement est pendulaire (86). La théorie de l'élasticité concorde ainsi parfaitement

avec le fait révélé dès le principe par l'inscription du mouvement acoustique, fait que confirmera une étude plus approfondie de ce mouvement.

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que, dans le mouvement vibratoire d'ensemble, chaque point du corps oscille suivant une ligne droite. Le mouvement du point sur la droite peut, d'après ce qui précède, se représenter par

$$x = A\cos(t - t_0)\sqrt{b},$$

mb étant le coefficient de proportionnalité de la force mbx à l'écart x.

Si l'on met en évidence la période

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{b}},$$

cette formule s'écrira

$$x = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{t_0}{\tau}\right),$$

ou

$$x = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right):$$

φ est la *phase*, c'est-à-dire le nombre de périodes [1] et la fraction de période écoulées depuis l'origine des temps jusqu'au moment où le mobile est parti de A.

La vitesse v du point en mouvement est

$$v = -\frac{2\pi A}{\tau}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right),$$

ou, si l'on pose $-\frac{2\pi A}{\tau} = a$,

$$v = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right).$$

[1] On fait généralement abstraction du nombre entier de périodes, ce nombre ne changeant pas la valeur du cosinus, laquelle dépend seulement de la fraction résiduelle.

Si l'on changeait l'origine des temps de manière à augmenter de $\frac{\pi}{2}$ le produit $2\pi\frac{t}{\tau}$, les sinus deviendraient des cosinus, et réciproquement. Les deux formules qui représentent, l'une le déplacement, l'autre la vitesse, sont donc tout analogues. L'usage est d'exprimer le déplacement par un cosinus et la vitesse par un sinus, mais c'est pure convention.

La vitesse variant d'un instant à l'autre pendant toute la durée de la période, l'effet mécanique du mouvement vibratoire, autrement dit l'intensité, se mesurera par la force vive moyenne pendant la période, c'est-à-dire par l'intégrale des forces vives pendant le temps τ divisée par τ. Comme le milieu est supposé partout le même, la masse est constante, et par conséquent l'intensité est proportionnelle à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v^2\,dt\\ &=\frac{a^2}{\tau}\int_0^\tau \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\varphi\right)dt\\ &=\frac{a^2}{\tau}\int_0^\tau \frac{1-\cos 4\pi\left(\frac{t}{\tau}-\varphi\right)}{2}dt\\ &=\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi l'intensité a pour mesure, à un facteur constant près, le carré de l'amplitude.

Combinaison de deux mouvements vibratoires de même période. Si deux mouvements vibratoires parallèles et de même période se superposent en un même point suivant une même direction (ou suivant des directions peu inclinées), les vitesses des mouvements composants étant à chaque instant représentées par

$$v=a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\varphi\right)$$

et

$$v'=a'\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\varphi'\right),$$

la vitesse du mouvement résultant,

$$V = v + v' = (a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi') \sin 2\pi\frac{t}{\tau} - (a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi') \cos 2\pi\frac{t}{\tau},$$

sera donnée par une expression de la même forme

$$V = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \Phi\right)$$
$$= A \cos 2\pi\Phi \sin 2\pi\frac{t}{\tau} - A \sin 2\pi\Phi \cos 2\pi\frac{t}{\tau};$$

car on peut toujours poser

$$A \cos 2\pi\Phi = a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi'$$

et

$$A \sin 2\pi\Phi = a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi'.$$

Si, en effet, on élève ces deux expressions au carré et qu'on les ajoute, on a

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi(\varphi - \varphi'),$$

équation donnant toujours pour A une valeur réelle.
Si l'on divise la deuxième par la première, il vient

$$\operatorname{tg} 2\pi\Phi = \frac{a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi'}{a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi'},$$

et il existe toujours une valeur réelle de Φ satisfaisant à cette équation.

Le carré de l'amplitude étant proportionnel à l'intensité, A^2 peut être regardé comme mesurant l'intensité au point considéré; et l'on voit que cette intensité dépend de la différence de phase que les deux mouvements composants offrent en ce point; elle est

$$\text{maximum, si } \cos 2\pi(\varphi-\varphi')=+1 \quad \text{ou} \quad \varphi-\varphi'=\frac{2k}{2},$$

$$\text{minimum, } \ldots\ldots\ldots\ldots =-1 \quad \ldots\ldots =\frac{2k+1}{2},$$

k étant un nombre entier quelconque 0, 1, 2, 3,...

L'intensité est maximum ou minimum suivant que la différence de phase est un nombre pair ou impair de demi-périodes.

Les deux mouvements qui viennent se superposer en Q (fig. 42) à l'époque t sont ceux qui existaient respectivement en A et B aux époques $t-\varphi\tau$ et $t-\varphi'\tau$; $(\varphi-\varphi')\tau$ est la différence des temps que les mouvements composants ont employés pour arriver en Q. Au lieu des temps écoulés, exprimés en périodes, on peut considérer les chemins parcourus, mesurés en longueurs d'onde. Si, dans l'expression de φ,

$$\varphi=\frac{t_0}{\tau},$$

nous remplaçons τ par sa valeur tirée de l'équation fondamentale

$$\lambda=V\tau,$$

nous aurons

$$\varphi=\frac{r}{\lambda},$$

en désignant par r le chemin Vt_0 parcouru depuis l'origine du temps, le *retard*; la vitesse peut donc encore s'écrire

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right).$$

Les vitesses des deux mouvements interférents seront alors

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right).$$

$$a' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r'}{\lambda}\right);$$

et l'on verrait aisément que la vitesse du mouvement résultant peut se représenter par

$$A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{R}{\lambda}\right),$$

l'intensité de ce mouvement ayant pour mesure

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda},$$

si l'on appelle δ la *différence de marche* $r - r'$ des deux mouvements, et le retard R étant défini par l'équation

$$\operatorname{tg} 2\pi\frac{R}{\lambda} = \frac{a \sin 2\pi\frac{r}{\lambda} + a' \sin 2\pi\frac{r'}{\lambda}}{a \cos 2\pi\frac{r}{\lambda} + a' \cos 2\pi\frac{r'}{\lambda}}.$$

L'intensité résultante sera maximum ou minimum suivant que l'on aura

$$\delta = 2k\frac{\lambda}{2},$$

ou

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

c'est-à-dire suivant que la différence de marche sera un multiple pair ou un multiple impair de la demi-longueur d'onde.

Si les intensités des deux mouvements composants sont égales, $a = a'$, l'intensité maximum du mouvement résultant vaut quatre fois chacune des intensités composantes, l'intensité minimum est nulle.

On retrouve les résultats connus.

Règle de Fresnel. — Si l'on avait à composer dans un plan deux forces a et a' passant par un même point et faisant avec une droite donnée les angles $2\pi\varphi$ $\left(\text{ou } 2\pi\frac{r}{\lambda}\right)$ et $2\pi\varphi'$ $\left(\text{ou } 2\pi\frac{r'}{\lambda}\right)$, la résultante

serait précisément déterminée en grandeur et en direction par les deux équations qui définissent A^2 et $tg\,2\pi\Phi\left(\text{ou } tg\,2\pi\frac{R}{\lambda}\right)$. Il y a là une analogie remarquable, sur laquelle a beaucoup insisté Fresnel : si l'on représente chaque mouvement vibratoire par une droite de longueur a, menée sous l'angle $2\pi\varphi$ $\left(\text{ou } 2\pi\frac{r}{\lambda}\right)$, la règle pour composer deux mouvements vibratoires d'amplitudes et de phases (ou de marches) données est la même que la règle pour composer deux forces de grandeurs et de directions données : c'est la règle d'addition des vecteurs.

Tout mouvement vibratoire rectiligne peut de même se décomposer en deux autres ayant des phases quelconques.

Parmi tous ces modes de décomposition, il en est un que nous

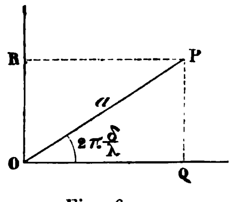


Fig. 60

devons signaler dès maintenant, parce qu'il est d'un fréquent usage c'est celui qui consiste à remplacer le mouvement proposé par deux autres,

l'un de phase o (ou de retard o) et d'amplitude $a\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$,

l'autre de phase $\frac{1}{4}$ $\left(\text{ou de retard } \frac{\lambda}{4}\right)$ et d'amplitude $a\sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$:

il suffit de jeter les yeux sur la figure ci-contre, comme d'ailleurs sur l'expression $v = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$, pour voir que la vibration proposée OP équivaut en effet à ces deux vibrations OQ, OR.

La généralisation de la règle de Fresnel est évidente, tout ce que nous avons dit de la composition de deux mouvements s'étendant de soi au cas d'un nombre quelconque de mouvements.

Interférence des ondes sonores dans un tuyau limité. — Il ne sera

pas inutile de reprendre analytiquement l'étude de la superposition du mouvement direct et du mouvement réfléchi, examinée déjà plus haut. Pour simplifier le calcul, et en vue des applications ultérieures, nous considérerons une onde plane émise à l'orifice d'un tuyau de longueur L : cette onde se propage jusqu'à l'extrémité du tuyau, s'y réfléchit comme nous l'avons vu (350), et revient se superposer à l'onde directe résultant du mouvement entretenu à l'origine.

Examinons d'abord le cas d'un tuyau fermé.

En un point quelconque de la tranche située à la distance x du fond, les vitesses des deux mouvements concourants sont, abstraction faite de la diminution de l'amplitude dans le mouvement réfléchi,

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L-x}{\lambda}\right),$$

et

$$-a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L+x}{\lambda}\right)\ (^1);$$

et la vitesse du mouvement résultant, égale à la somme des vitesses des mouvements composants, est

$$v = 2a \sin 2\pi\frac{x}{\lambda} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L}{\lambda}\right).$$

Cette formule montre que :

1° A une époque quelconque, v est nulle aux points pour lesquels

$$\sin 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0, \quad \text{ou} \quad x = k\frac{\lambda}{2},$$

k étant un nombre entier quelconque. On a donc une série de nœuds fixes aux distances du fond

$$0,\ \frac{\lambda}{2},\ 2\frac{\lambda}{2},\ 3\frac{\lambda}{2},\ldots$$

(1) On obtient également cette formule, soit que l'on considère le chemin géométrique $L+x$ parcouru par l'ébranlement réfléchi et qu'on tienne compte du signe — de la vitesse de cet ébranlement, soit que l'on considère le chemin physique $L+x+\frac{\lambda}{2}$ sans s'occuper d'aucun changement de signe.

2° Pour une valeur quelconque de t, v est maximum en valeur absolue aux points tels que

$$\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}=\pm 1, \quad \text{ou} \quad x=(2k+1)\frac{\lambda}{4}.$$

Ainsi il existe une série de ventres fixes, échelonnés aux points

$$\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \ldots;$$

et les vitesses sont, à un même instant, de signes contraires en deux ventres successifs, et plus généralement dans deux internœuds consécutifs, les changements de signe se faisant aux nœuds.

3° Pour une valeur donnée de x, la vitesse est une fonction circulaire du temps dont la période est partout égale à τ et dont la phase est indépendante de x : les vitesses sont donc nulles ou maxima en même temps sur toute la longueur L.

La condensation γ au point x est

$$\gamma=-\frac{du}{dx},$$

u étant le déplacement du point considéré.

Or

$$v=\frac{du}{dt},$$

d'où

$$u=2a\frac{\tau}{2\pi}\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L}{\lambda}\right).$$

Donc

$$\gamma=-2a\frac{\tau}{\lambda}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L}{\lambda}\right),$$

ou, d'après la relation fondamentale $\lambda=V\tau$, V étant la vitesse du son dans le milieu ébranlé,

$$\gamma=-\frac{2a}{V}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{L}{\lambda}\right).$$

Ainsi la condensation en un point donné est représentée par la même fonction périodique du temps que la vitesse, la phase seule diffère, $-\sin 2\pi\frac{t}{\tau}$ étant égal à $\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{4}\right)$; et, à une époque donnée, les condensations sont distribuées le long du tuyau suivant la même loi que les vitesses, hors que la condensation est maximum là où la vitesse est nulle, c'est-à-dire aux nœuds, et nulle là où la vitesse est maximum, c'est-à-dire aux ventres.

Si le tuyau est ouvert, les vitesses des deux mouvements interférents sont

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{\mathrm{L}-x}{\lambda}\right),$$

et

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{\mathrm{L}+x}{\lambda}\right);$$

la vitesse du mouvement résultant est donc

$$v = 2a \cos 2\pi\frac{x}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{\mathrm{L}}{\lambda}\right),$$

et la condensation

$$\gamma = -\frac{2a}{\mathrm{V}} \sin 2\pi\frac{x}{\lambda} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{\mathrm{L}}{\lambda}\right).$$

Ces formules sont, à un facteur constant près, les mêmes que dans le cas d'un tuyau fermé, sauf que la formule qui représentait la vitesse s'applique maintenant à la condensation changée de signe, et *vice versa*. Il en résulte que là où se trouvait un nœud se trouve un ventre, et réciproquement, les nœuds étant toujours caractérisés par cette double circonstance que la vitesse y est nulle à toute époque, et la condensation maximum par rapport aux condensations des autres points, mais périodiquement variable suivant la loi harmonique, tandis qu'aux ventres la condensation est toujours nulle et la vitesse offre un maximum relatif, dont la valeur absolue oscille entre deux limites, l'une positive, l'autre négative.

CHAPITRE V

TUYAUX SONORES

358. Vibration de l'air dans un tuyau sonore. — L'usage des tuyaux sonores remonte à l'antiquité la plus reculée : les origines du chalumeau, de la flûte, de la trompette se perdent dans la nuit des temps. De nos jours, les instruments à vent ont pris un développement considérable, et les grandes orgues réunissent des milliers de tuyaux de toute espèce.

Dans ces divers instruments le corps vibrant est essentiellement l'air. Les tuyaux d'orgue se construisent indifféremment en bois ou en métal : la hauteur du son ne dépend pas de la matière formant les parois, tant que celles-ci sont suffisamment épaisses et résistantes. Trois tuyaux de mêmes dimensions, l'un en cuivre, l'autre en bois, et le troisième en carton, donneront sensiblement le même son, à moins que le carton ne soit assez mince pour vibrer avec l'air intérieur : alors la note du troisième tuyau serait abaissée. Au contraire, la nature du gaz influe sur le son, qui monte ou descend, selon qu'on emploie un gaz léger (gaz d'éclairage et surtout hydrogène), ou lourd (acide carbonique ou protoxyde d'azote).

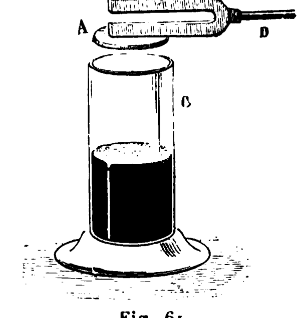


Fig. 61

L'air peut d'ailleurs être mis en vibration dans le tuyau de différentes manières. Un diapason approché de l'ouverture d'un tuyau communiquera son mouvement à l'air intérieur, et si la longueur

de la colonne aérienne est convenable, le son du diapason sera énergiquement renforcé. Ordinairement pour faire parler un tuyau on emploie une *embouchure* actionnée par le vent d'une soufflerie. L'embouchure la plus usitée est celle que représente la figure ci-contre et que l'on appelle *embouchure de flûte*, ou *bouche*. Le *pied* P du tuyau étant fixé sur le *sommier* d'une soufflerie, l'air arrive dans la *boîte à air* K, d'où il sort par la *lumière c* pour venir frapper contre la *lèvre ab* taillée en biseau : l'espace compris entre la fente *c* et le biseau *ab* se nomme la bouche. Le frottement de l'air contre le biseau produit un sifflement que l'on entend très bien sur une embouchure isolée (¹) : ce sifflement est formé d'un grand nombre de sons discordants, entre lesquels le tuyau RR choisit pour le renforcer celui (ou ceux) qui se trouve parmi les sons qu'il peut rendre lui-même (²).

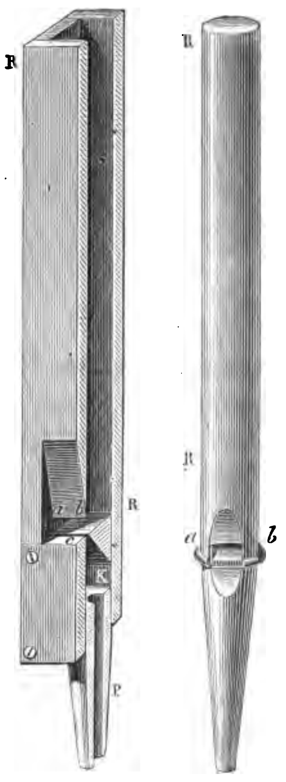


Fig. 62

359. Lois de Bernoulli. — Les sons que rend un tuyau sonore sont soumis à certaines lois, établies par Daniell Bernoulli (³), et qui découlent immédiatement des principes précédemment exposés.

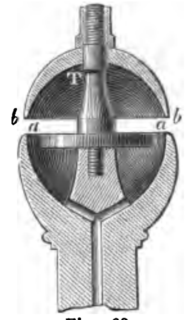


Fig. 63

(¹) Un sifflet de locomotive n'est en réalité qu'une embouchure constituée par une fente circulaire *aa*, au-dessus de laquelle se place le bord tranchant *bb* du timbre T.

(²) La hauteur du son rendu est indépendante de la substance qui constitue le biseau, pourvu que celle-ci soit rigide; mais le son monte quand le biseau se rapproche de la lumière. Il monte encore quand la vitesse du courant d'air augmente.

(³) D. Bernoulli, *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1762, p. 431.

Supposons le tuyau de dimensions transversales assez restreintes pour que le mouvement puisse être considéré comme se propageant par tranches, tous les points d'une même section droite ayant à chaque instant même vitesse parallèle à l'axe. Le mouvement, parti de l'embouchure, progresse dans le tuyau jusqu'à l'extrémité, s'y réfléchit, rebrousse chemin, et se superposant au mouvement direct, entretenu à l'origine, donne naissance au système de nœuds et de ventres fixes étudié plus haut. Mais, une fois revenue à l'origine, l'onde sonore s'y réfléchit et repart de nouveau, constituant en quelque sorte une nouvelle onde directe. Si cette nouvelle onde est dans le même état que l'onde primitive, elle se réfléchira comme elle au bout du tuyau et engendrera par interférence avec l'onde réfléchie qu'elle provoque, c'est-à-dire avec l'onde trois fois réfléchie, un système identique à celui qui résultait de l'interférence de la première onde avec son onde réfléchie. Il en sera de même de l'interférence de l'onde quatre fois réfléchie avec l'onde cinq fois réfléchie, et ainsi de suite. Tous ces mouvements s'ajoutant renforceront énergiquement le son originel. Donc, pour savoir dans quels cas le renforcement se produit, il suffit de déterminer les conditions de la concordance entre l'onde deux fois réfléchie et l'onde directe.

I. *Tuyaux ouverts.* — L'onde partie de l'origine, réfléchie à l'extrémité libre, réfléchie une deuxième fois à l'origine, n'a subi dans sa vitesse aucun changement de signe ; la condensation a éprouvé deux changements de signe successifs, de sorte que finalement le signe primitif se trouve rétabli. Donc l'onde deux fois réfléchie sera concordante avec l'onde directe, si le chemin parcouru, c'est-à-dire le double de la longueur L du tuyau, contient un nombre entier k de fois la longueur d'onde λ du son proposé. Ainsi la condition du renforcement sera

$$2L = k\lambda,$$

ou, d'après la relation $\lambda = V\tau = \frac{V}{N}$, N étant dans l'unité de temps le nombre de vibrations du son de période τ,

$$N = k\frac{V}{2L}.$$

Cette formule renferme toutes les lois relatives aux tuyaux ouverts :

1° Un tuyau ouvert peut rendre une série de sons dont les nombres de vibrations sont entre eux comme 1, 2, 3, 4, 5,....., c'est-à-dire comme la série complète des harmoniques naturels.

2° La hauteur de l'un quelconque de ces sons est en raison inverse de la longueur du tuyau.

3° Le son le plus grave que peut rendre le tuyau, le *son fondamental*, défini par $k=1$, a pour longueur d'onde le double de la longueur du tuyau

$$\lambda = 2L,$$

ou pour hauteur

$$N = \frac{V}{2L}.$$

4° Les nœuds et les ventres fixes des différents sons se placent

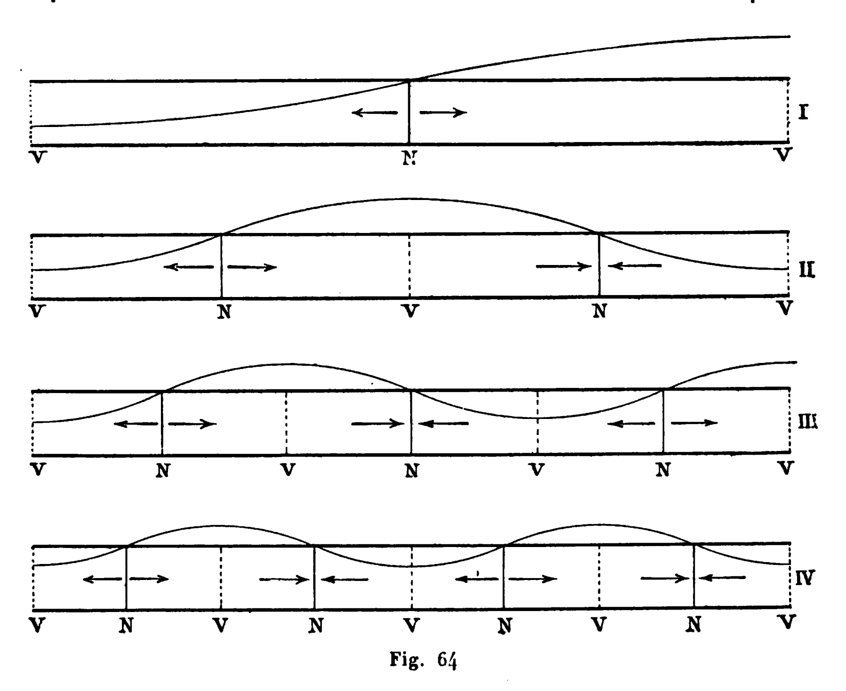


Fig. 64

comme l'indique la figure ci-contre, chacune des deux extrémités ouvertes étant nécessairement un ventre.

Dans les internœuds successifs, les vitesses sont de signe contraire. Si les courbes tracées sur les figures représentent les vitesses à une certaine époque, ces vitesses après une demi-période auront pris partout des valeurs égales et opposées, les vitesses étant toujours de signe contraire de part et d'autre d'un nœud. De même, à un instant donné, les nœuds successifs sont alternativement condensants et dilatants, et ils changent tous de signe en même temps toutes les demi-périodes, l'air intérieur étant pendant un moment partout à la pression atmosphérique.

II. *Tuyaux fermés.* — La réflexion contre le fond changeant le signe de la vitesse, et la réflexion à l'origine changeant le signe de la condensation, l'onde deux fois réfléchie sera concordante avec l'onde directe, si le chemin parcouru $2L$, augmenté de $\frac{\lambda}{2}$, est égal à $k\lambda$. On devra donc avoir

$$4L=(2k-1)\lambda,$$

ou

$$N=(2k-1)\frac{V}{4L}.$$

D'où les lois suivantes :

1° Un tuyau fermé peut rendre une série de sons caractérisés par les harmoniques impairs 1, 3, 5, 7,.....

2° La hauteur de l'un quelconque de ces sons est en raison inverse de la longueur du tuyau.

3° Le son fondamental a pour longueur d'onde quatre fois la longueur du tuyau

$$\lambda=4L,$$

ou pour hauteur

$$N=\frac{V}{4L}:$$

il est à l'octave grave du son fondamental d'un tuyau ouvert de même longueur.

4° Les points notables sont disposés comme le montre la figure ci-après, le fond du tuyau étant toujours un nœud.

Chaque son étant à l'octave grave du son analogue que rendrait un tuyau ouvert de même longueur, est identique à celui que

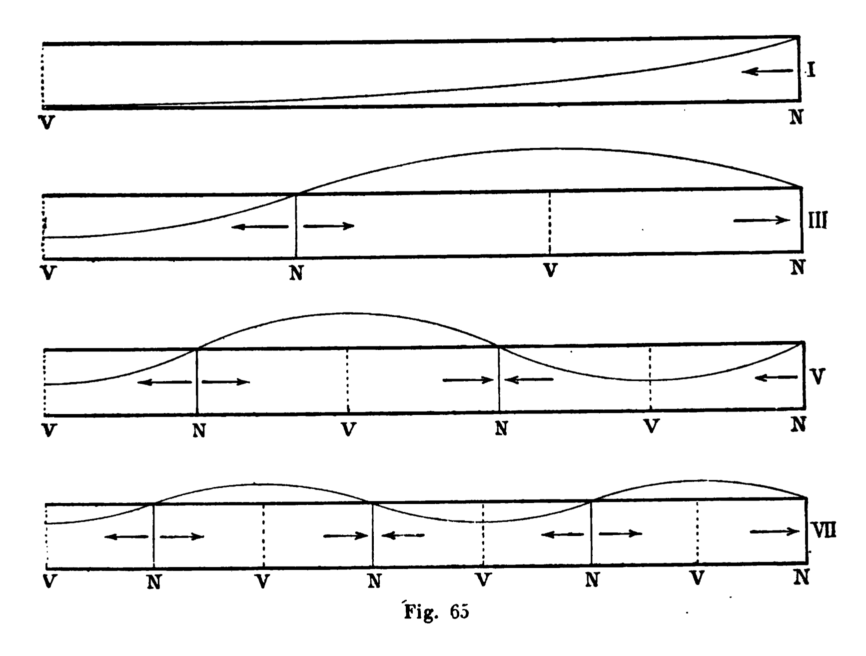


Fig. 65

donnerait un tuyau ouvert prolongé d'une longueur égale au delà du fond : dans un tel tuyau les seuls harmoniques possibles sont évidemment les harmoniques impairs.

360. Vérifications expérimentales. — L'expérience s'accorde en général d'une façon satisfaisante avec la théorie qui précède.

1° Mersenne [1] remarque que de la trompette harmonique on tire aisément la tonique, l'octave, la douzième (quinte de l'octave), la quinzième (double octave), et pas de notes intermédiaires. Sauveur [2] cite des faits semblables ; mais c'est Bernoulli qui établit le premier la loi de succession des sons supérieurs tant dans les tuyaux ouverts que dans les tuyaux fermés. Pour la vérifier après lui, on prend un tuyau long et étroit, un grand tube de verre, monté sur une embouchure de flûte, et on y envoie de l'air sous pression croissante : les sons se succèdent en suivant très

(1) Mersenne, *loc. cit.*, p. 271.

(2) Sauveur, *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1701, p. 299.

sensiblement la série harmonique. On obtient tous les termes de la série (sans peine jusqu'au vingtième) si le tuyau est ouvert (1), les termes impairs seulement si le tuyau est fermé. Le passage d'un terme à l'autre ne se fait pas d'une façon absolument brusque ; le son ne prend sa nouvelle hauteur qu'après avoir débuté faiblement en dessous ; puis il s'enfle en montant jusqu'à ce qu'il ait atteint le ton voulu : il a acquis alors sa pleine intensité, l'intensité maximum correspondant à l'exacte concordance de toutes les ondes superposées dans la colonne vibrante. D'ailleurs, les divers sons dont on constate ainsi la succession peuvent évidemment coexister : en fait, le son fondamental d'un tuyau cylindrique étroit est toujours accompagné d'harmoniques nettement perceptibles.

2° La loi de la raison inverse de la longueur est très anciennement connue. Elle s'applique assez bien aux tuyaux longs et étroits; mais, d'une manière générale, elle comporte certaines perturbations sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

3° La relation entre les sons fondamentaux d'un tuyau ouvert et d'un tuyau fermé de même longueur se constate facilement au moyen d'un tuyau ouvert quelconque : en le bouchant on lui fait rendre l'octave grave du son primitif.

4° Pour étudier la disposition des points notables, on peut recourir à un grand nombre de procédés.

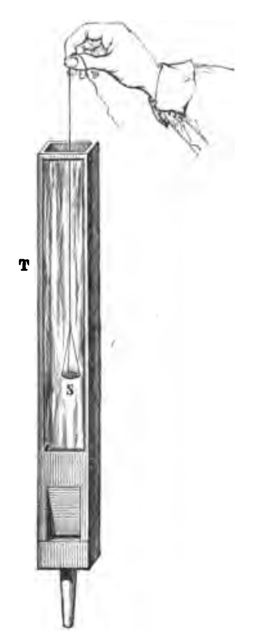


Fig. 66

Si l'on introduit dans un tuyau à paroi de verre une petite membrane recouverte de sable, on reconnaît aisément que le sable est en repos aux nœuds seulement, tandis qu'il est agité dans tout le reste de la colonne et particulièrement aux ventres. A la membrane recouverte de sable, employée par Savart (2), on peut substi-

(1) Quand le tuyau est très long, on obtient difficilement le son fondamental : l'instrument a une tendance à *octavier*.

(2) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIV, 58 ; 1823.

tuer une lame de collodion (Gripon), ou de liquide glycérique (Mach). L'expérience peut se faire pour un son supérieur quel-

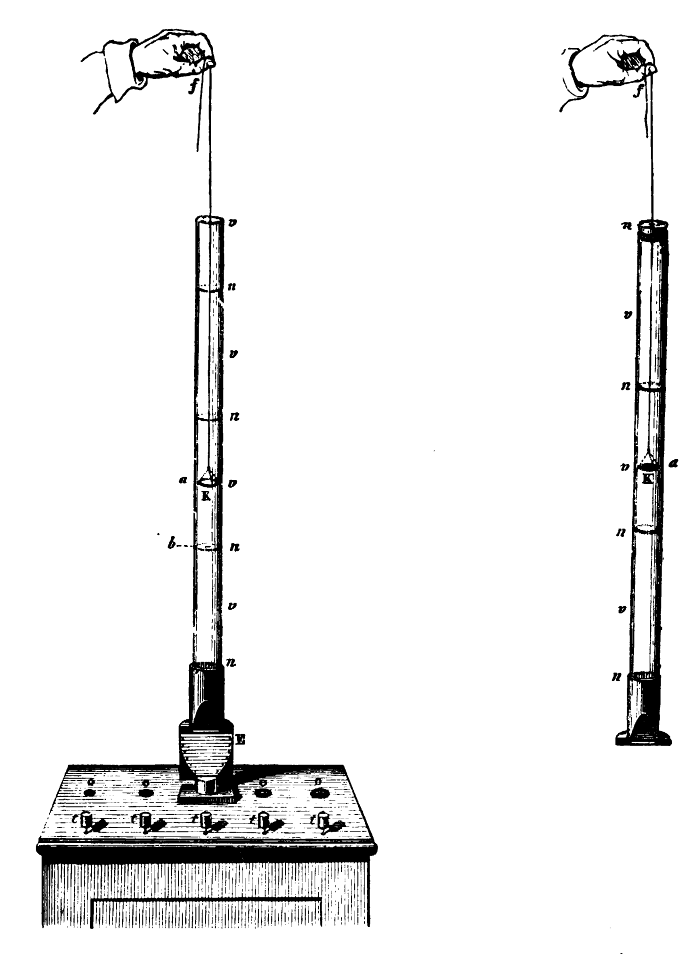


Fig. 67

conque, comme pour le son fondamental, et dans un tuyau fermé aussi bien que dans un tuyau ouvert ([1]).

La pression aux ventres étant la pression atmosphérique, un trou percé à un ventre ne change pas le son, tandis qu'ailleurs il le modifie : dans le tuyau figuré ci-contre et excité de façon

([1]) Sur quelques singularités que peut présenter cette expérience, voir von Lang, *Wied. Ann.*, VII, 292; 1879.

à rendre le son 3, la hauteur du son ne change pas quand on ouvre les trous correspondant aux ventres *v*, *v*, mais elle monte quand on lève les opercules *a* ou *b*.

Aux nœuds, la vitesse est nulle. Si donc on immobilise la tranche

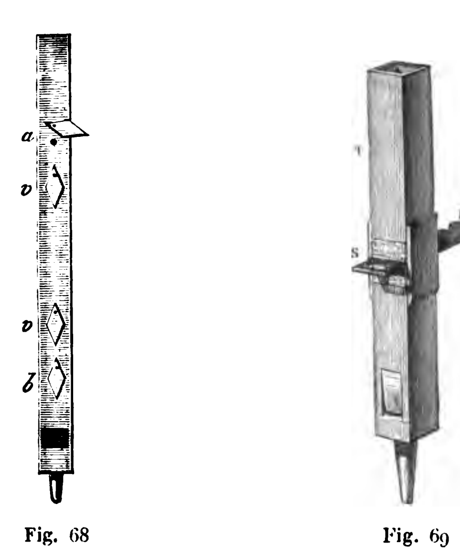


Fig. 68 Fig. 69

d'air qui s'y trouve, on n'apporte aucune modification à l'état de la colonne vibrante. Ainsi, le tuyau ouvert T rendant le son fondamental, poussons la coulisse AS placée au nœud de manière à substituer à la partie évidée S la partie pleine A : le son ne change pas. On peut encore interpréter cette expérience comme prouvant qu'un tuyau fermé donne le même son qu'un tuyau ouvert de longueur double.

Si l'air est immobile aux nœuds, la pression y est maximum. C'est donc là qu'il faudra disposer les capsules manométriques de Kœnig. La figure 70 représente un tuyau ouvert, muni de capsules manométriques au nœud *a* du son 1, et aux nœuds *b*, *c* du son 2. Quand le tuyau émet le son fondamental, les trois flammes s'agitent, mais celle du milieu accuse des variations de longueur beaucoup plus marquées que les deux autres : elle peut même s'éteindre si le son est suffisamment intense. Au contraire, cette flamme *a* est absolument immobile, tandis que les deux autres *b*, *c* sont fortement agitées, si le tuyau donne l'octave. Dans le

tuyau bouché, représenté à côté, la flamme *b* placée près du fond correspond toujours à un nœud ; les autres sont disposées au ventre *a* et au nœud *c* du premier son supérieur (son 3). Si le tuyau rend le son fondamental, les trois flammes vibrent, mais avec une intensité décroissante de *b* à *c*. Si le tuyau donne le son 3, la flamme *a* est immobile, tandis que les flammes *b* et *c* éprouvent des variations considérables d'éclat et de hauteur. On sait que la

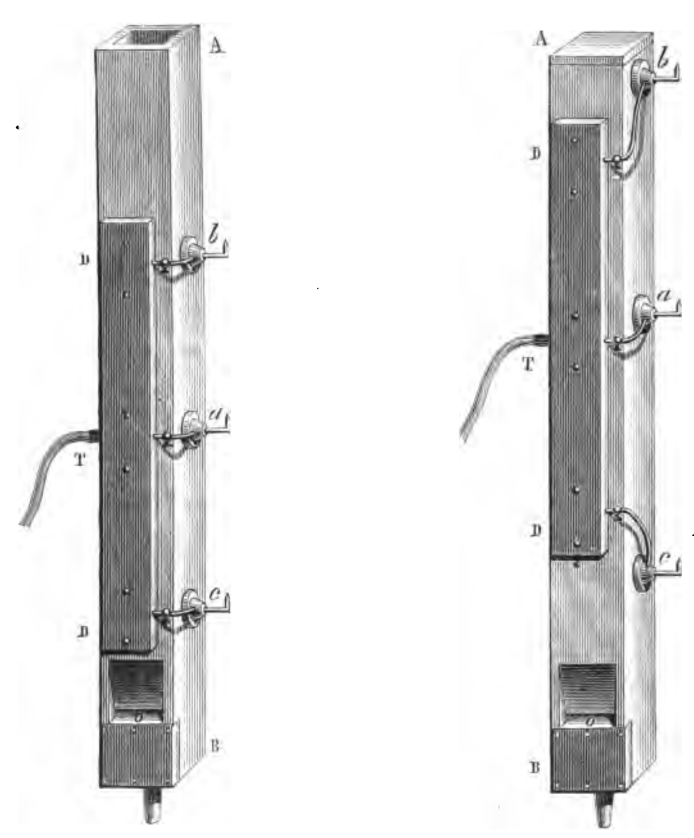


Fig. 70

manière la plus facile de saisir ces variations est d'examiner la flamme dans un miroir tournant.

M. Kœnig [1] a construit encore un appareil très commode pour étudier l'état d'une colonne aérienne en vibration. Un grand tuyau d'orgue, couché horizontalement au-dessus d'une longue

[1] Kœnig, *Wied. Ann.*, 569; 1881; et *Quelques expériences*, p. 206.

cuvette, est fendu sur toute la longueur de sa face inférieure : dans la fente pénètre l'une des branches *ca* d'un tube en U, venant déboucher au centre de la section droite du tuyau ; l'autre branche *db*, restant en dehors, peut être reliée à l'oreille ou à une capsule manométrique. Dans la cuvette on verse un liquide qui forme fermeture hydraulique, tout en permettant de faire marcher le tube explorateur de façon à amener son orifice intérieur en tel point que l'on veut de l'axe de la colonne vibrante. La figure 71 offre une coupe transversale du tuyau, fermé en haut par une glace, au-dessus de laquelle peut glisser la pince *mn* soutenant le

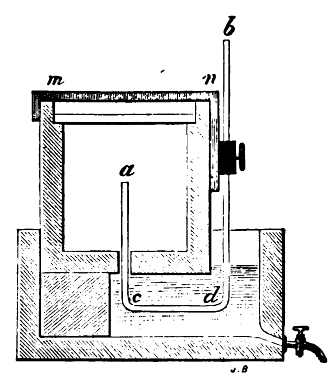


Fig. 71

tube explorateur *acdb*. En promenant ce tube tout le long du tuyau, pendant que celui-ci émet une note quelconque, on constate à l'oreille que le son s'enfle puissamment aux nœuds, et s'affaiblit aux ventres. L'expérience montre que, s'il est difficile de reconnaître nettement le lieu d'un maximum d'intensité, il est au contraire aisé de fixer la place d'un minimum, le son y disparaissant brusquement, de manière qu'on détermine à l'oreille la position des ventres avec exactitude et facilité. L'observation d'une flamme assez courte peut suppléer l'oreille : la flamme devient subitement très lumineuse à chaque ventre, tandis que dans tout le reste de la colonne elle est bleue et peu visible.

Quand un tuyau rend un son supérieur, la colonne d'air se divise spontanément en parties aliquotes, vibrant isolément et à l'unisson.

Si, par exemple, un tuyau ouvert rend le son 4, nous pouvons

considérer la colonne d'air comme partagée en quatre segments de longueur $\frac{\lambda}{2}$, limités aux ventres v, v, v, de sorte que si l'on enlève successivement le segment supérieur, puis le suivant, puis encore celui qui vient après, le son conserve toujours la même hauteur : il restera identique si l'on remet les uns après les autres les trois segments. L'expérience se fait avec la *flûte de Bernoulli*, étroit tuyau en palissandre, formé d'une première partie portant l'embouchure et de trois autres tronçons de même longueur, superposés.

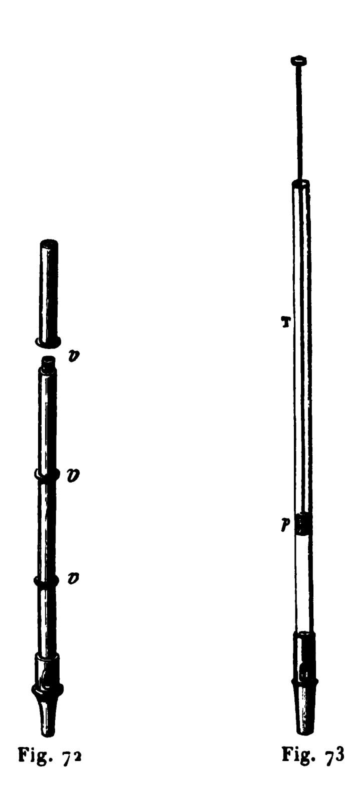


Fig. 72 Fig. 73

Au lieu de démonter le tuyau aux ventres, limitons-le successivement aux divers nœuds à l'aide d'un piston mobile p, ainsi que le faisait Bernoulli : nous pourrons encore ajouter ou retrancher un nombre quelconque de concamérations sans modifier le son primitif [1].

[1] Outre les tuyaux ouverts et les tuyaux fermés ou *bourdons*, on emploie encore en musique les *tuyaux à cheminée*, tuyaux bouchés dont le fond porte

Ces expériences sont susceptibles de mesures comportant une certaine précision. Ainsi, d'après Masson ([1]), une flûte de Bernoulli rendant un son dont la demi-longueur d'onde était $0^m,138$, se composait de segments ayant précisément cette même longueur $0^m,138$, à l'exception de celui qui portait l'embouchure et dont la longueur était seulement $0^m,103$.

Pareillement, quand on opère avec un piston mobile dans un tuyau long, étroit, embouché sur tout son pourtour et rendant un son de rang un peu élevé, comme l'ont fait Desains et Lissajous ([2]), on constate que la longueur des internœuds est la même dans tout le tuyau et égale à la demi-longueur d'onde du son émis.

Le tube explorateur conduit aux mêmes résultats : M. Kœnig trouve par exemple pour le huitième son d'un tuyau ouvert, ayant $2^m,33$ de longueur sur $0^m,12$ de côté, les distances suivantes, en millimètres, des ventres successifs, à partir de l'embouchure :

173, 315, 320, 314, 316, 312, 309, 271 :

les six nombres moyens sont sensiblement égaux entre eux et à leur moyenne 314; le premier est inférieur à cette moyenne de 141 et le dernier, de 43 ([3]).

L'expérience confirme donc les indications de la théorie, sauf la relation entre la longueur du tuyau et la longueur d'onde. La longueur d'un tuyau, ouvert ou fermé, émettant le son fondamental, est moindre que la longueur théorique $\frac{\lambda}{2}$ ou $\frac{\lambda}{4}$. Si le tuyau rend un son supérieur, les points notables sont distants de $\frac{\lambda}{4}$ sur toute la longueur du tuyau, à l'exception du premier

une ouverture à laquelle est adapté un petit tuyau ouvert de longueur convenable. La théorie de ces instruments a été établie par Bernoulli, Poisson et Duhamel; M. Gripon en a vérifié la conséquence la plus importante, d'accord avec les faits qui précèdent, à savoir que les deux colonnes d'air de diamètres différents qui composent un tuyau à cheminée vibrent isolément à l'unisson, les nœuds et les ventres étant placés dans chacune aux distances voulues de l'extrémité libre (Gripon, *Ann. de l'Éc. norm.*, (1), I; 1864).

([1]) Masson, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XL, 463; 1855.

([2]) Desains et Lissajous, *Expériences inédites*, citées dans Desains, *Leçons de physique*, II, 70. Paris, Desobry; 1860.

([3]) Cf. Hurion, *Journal de physique*, (2), I, 136; 1882.

nœud qui est toujours plus rapproché de l'embouchure et du dernier nœud dans un tuyau ouvert ou du dernier ventre dans un tuyau bouché [1] qui est encore à une distance de l'extrémité moindre que $\frac{\lambda}{4}$. C'est ce que l'on appelle les perturbations aux extrémités.

361. Perturbations aux extrémités. — *Leur origine.* — La perturbation la plus importante est celle qui se produit à l'embouchure. Elle provient de ce que, par suite même du mode d'ébranlement, la condensation n'est pas nulle dans tous les points de la tranche originelle, ainsi que l'exige la théorie.

A l'extrémité libre du tuyau ouvert, les choses ne se passent pas non plus comme nous l'avons supposé. Sous l'influence du courant d'air qui traverse le tuyau, la colonne vibrante se prolonge au delà des parois : la réflexion sur l'air extérieur n'a donc pas lieu exactement dans le plan extrême, mais un peu plus loin ; et aux points mêmes où s'opère cette réflexion, on ne saurait concevoir une condensation rigoureusement nulle : la densité de l'air intérieur est sans cesse égale non pas à la densité constante de l'air extérieur au repos, mais à la densité variable de cet air en vibration.

Dans les tuyaux fermés, nous avons admis que la vitesse de la dernière tranche était nulle, le fond étant inébranlable. De telles conditions ne peuvent être réalisées absolument; toutefois, il n'est pas difficile de donner au fond une résistance telle que la perturbation y soit très faible.

Théorie de Poisson [2]. — Poisson le premier rejeta l'hypothèse d'une condensation nulle aux extrémités libres; et, en admettant seulement qu'elle y est très petite, mais proportionnelle à la vitesse [3], il édifia une théorie qui rend bien compte des faits, dégage les lois, et fait ressortir les perturbations, sans toutefois les mesurer.

(1) Tel est du moins le résultat des expériences de M. Kœnig; Savart avait trouvé au contraire que la distance entre le fond d'un tuyau fermé et le dernier ventre était supérieure à un quart d'onde.

(2) Poisson, *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1817, II, 305.

(3) Cette dernière supposition est inutile, Hopkins sut s'en passer; elle est même inexacte : il y a une différence de phase de 1/4 entre la vitesse et la condensation à l'extrémité libre d'un tuyau ouvert.

Travaux d'Hopkins [1] *et de Quet* [2]. — Hopkins et Quet améliorèrent cette théorie, et mirent en évidence l'effet des réflexions multiples aux extrémités.

Nous avons dit que la condition pour qu'un tuyau renforce un son produit à l'origine est la concordance de l'onde deux fois réfléchie avec l'onde directe. Si, en effet, cette concordance existe, toutes les ondes deux fois, quatre fois, six fois, ... réfléchies se superposent à l'onde directe et, en un temps très court, vu la rapidité avec laquelle se propage le son, amènent un renforcement énergique. Mais quel est l'effet exact de cette superposition?

Considérons un mouvement vibratoire entretenu à l'origine,

$$v = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Ce mouvement se réfléchit à l'extrémité du tuyau : nous admettrons, avec Hopkins, que toute réflexion produit à la fois un changement d'amplitude et un changement de phase. Soit ma l'amplitude du mouvement réfléchi, m étant un facteur plus petit que 1. Le mouvement réfléchi se superpose au mouvement direct, et le mouvement résultant, en un point situé à la distance x de l'extrémité, a une amplitude A et une phase Φ déterminées, d'après la règle de Fresnel, par les équations

$$A^2 = a^2\left(1 + m^2 + 2m\cos 2\pi(\varphi' - \varphi)\right)$$
$$\operatorname{tg} 2\pi\Phi = \frac{\sin 2\pi\varphi + m \sin 2\pi\varphi'}{\cos 2\pi\varphi + m\cos 2\pi\varphi'},$$

φ et φ' étant les phases des mouvements composants au point considéré

Revenu à l'origine, le mouvement s'y réfléchit : soient $mm'a$ ou μa l'amplitude du mouvement deux fois réfléchi et Ψ sa phase à l'origine. Ce mouvement donnera avec le mouvement trois fois réfléchi, un mouvement résultant dont l'amplitude sera μA et la phase $\Phi + \Psi$, puisque les conditions d'interférence restent les

(1) Hopkins, *Cambridge Phil. Trans.*, V; 1838.
(2) Quet, *Journal de Liouville*, XX, 1; 1855.

mêmes que pour le premier couple, sauf que les amplitudes sont multipliées par μ, et que la phase de chacun des mouvements composants est augmentée de Ψ' : chacune des lignes du triangle de Fresnel est multipliée par μ et a tourné de l'angle $2\pi\Psi'$.

Le mouvement quatre fois réfléchi donnera de même, avec le mouvement cinq fois réfléchi, un mouvement résultant d'amplitude $\mu^2 A$ et de phase $\Phi + 2\Psi'$, et ainsi de suite indéfiniment, le nombre de ces mouvements qui se superposent pour constituer le mouvement définitif étant très grand au bout d'un temps extrêmement court. L'intensité du mouvement définitif peut donc se représenter par

$$A^2 \left| \begin{array}{l} [\cos 2\pi\Phi + \mu\cos 2\pi(\Phi+\Psi') + \mu^2\cos 2\pi(\Phi+2\Psi') + \mu^3\cos 2\pi(\Phi+3\Psi') + \ldots]^2 \\ + [\sin 2\pi\Phi + \mu\sin 2\pi(\Phi+\Psi') + \mu^2\sin 2\pi(\Phi+2\Psi') + \mu^3\sin 2\pi(\Phi+3\Psi') + \ldots]^2, \end{array} \right.$$

ou, après des simplifications évidentes, par

$$A^2 \left| \begin{array}{l} [1 + \mu\cos 2\pi\Psi' + \mu^2\cos 2(2\pi\Psi') + \mu^3\cos 3(2\pi\Psi') + \ldots]^2 \\ \quad + [\mu\sin 2\pi\Psi' + \mu^2\sin 2(2\pi\Psi') + \mu^3\sin 3(2\pi\Psi') + \ldots]^2. \end{array} \right.$$

Mais chacune des sommes entre parenthèses est connue (¹) : la première est égale à $\frac{1-\mu\cos 2\pi\Psi'}{1-2\mu\cos 2\pi\Psi'+\mu^2}$ et la deuxième à $\frac{\mu\sin 2\pi\Psi'}{1-2\mu\cos 2\pi\Psi'+\mu^2}$.

L'expression précédente se réduit donc à

$$A^2 \frac{1}{1-2\mu\cos 2\pi\Psi'+\mu^2};$$

ou à

$$a^2 \frac{1+m^2+2m\cos 2\pi(\varphi'-\varphi)}{1-2\mu\cos 2\pi\Psi'+\mu^2}.$$

Le dénominateur étant indépendant de x, la position des points notables dépendra du numérateur seul.

(¹) Voir BERTRAND, *Cours de calcul différentiel et intégral*, I, 389. Paris, Gauthier-Villars; 1864.

Les ventres correspondent aux maxima du numérateur, c'est-à-dire aux points où $\cos 2\pi(\varphi' - \varphi)$ est égal à $+1$.

Or, on a

$$\varphi' - \varphi = \frac{L+x}{\lambda} - \frac{L-x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = \frac{2x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda},$$

L étant toujours la longueur du tuyau, et r représentant le retard produit par la réflexion à l'extrémité.

Les ventres seront donc déterminés par la relation

$$\frac{2x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = k,$$

k étant un nombre entier quelconque ; et la distance de deux ventres successifs

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$$

sera, dans tous les cas, exactement égale à une demi-longueur d'onde.

On verrait de même que la distance de deux nœuds successifs sera toujours égale à $\frac{\lambda}{2}$.

Mais la distance du ventre le plus rapproché de l'extrémité à cette extrémité est donnée par la relation

$$\frac{2x_1}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = 1,$$

d'où l'on conclut que :

Dans un tuyau ouvert, la distance de l'extrémité au ventre le plus proche est

$$x_1 = \frac{\lambda}{2} - \frac{r}{2}.$$

Dans un tuyau fermé, où, r étant très-voisin de $\frac{\lambda}{2}$, on peut poser $r = \frac{\lambda}{2} + r'$, on a

$$x_1' = \frac{\lambda}{4} - \frac{r'}{2}.$$

La position des points notables relatifs à un son donné ne dépend pas de la longueur du tuyau (comptée à partir de l'extrémité où se produit la première réflexion) ; mais l'intensité du son en dépend.

En effet, la valeur absolue de l'intensité en un point quelconque, x étant constant et par suite le numérateur étant constant, sera maximum si le dénominateur est minimum, c'est-à-dire si $\cos 2\pi\Psi$ est égal à $+1$.

Or

$$\Psi = \frac{2L}{\lambda} + \frac{r+s}{\lambda},$$

s désignant le retard causé par la réflexion à l'origine.

Le renforcement sera donc maximum si la longueur L du tuyau satisfait à la condition

$$L + \frac{r}{2} + \frac{s}{2} = k\frac{\lambda}{2},$$

autrement dit si la longueur du tuyau, augmentée de $\frac{r}{2} + \frac{s}{2}$, est un multiple entier de la demi-longueur d'onde.

L'hypothèse la plus simple est de supposer chacun de ces retards r et s indépendant de la longueur d'onde. Leur somme est alors une constante

$$r + s = 2l,$$

et la condition du renforcement devient

$$L + l = k\frac{\lambda}{2}.$$

On retrouve la loi des longueurs, à cette seule différence près, que ce n'est pas la longueur même du tuyau, mais cette longueur augmentée d'une quantité constante l qui doit, pour le renforcement, être un multiple exact de la demi-longueur d'onde.

Quand le tuyau est fermé, on a $r = r' + \frac{\lambda}{2}$; on posera donc

$$r + s = 2l' + \frac{\lambda}{2}.$$

et il viendra

$$L + l' = (2k - 1)\frac{\lambda}{4}.$$

Les sons les plus énergiquement renforcés sont encore ceux pour lesquels la longueur du tuyau, augmentée d'une quantité constante l', est un multiple impair du quart de la longueur d'onde.

Expériences de Wertheim [1]. — D'après les expériences de Wertheim, les perturbations aux extrémités seraient en effet indépendantes de la longueur d'onde. Sur une même embouchure il vissait successivement divers tuyaux d'égal diamètre, mais de longueurs différentes; il mesurait ces longueurs; il déterminait d'autre part les nombres de vibrations des sons fondamentaux rendus par les tuyaux : ces deux éléments lui permettaient de calculer la constante cherchée. Soient, par exemple, des tuyaux fermés, de longueurs L_1, $L_2, \ldots$, émettant les sons N_1, $N_2, \ldots$, on a

$$N_1 = \frac{V}{4(L_1 + l')},$$
$$N_2 = \frac{V}{4(L_2 + l')},$$

V étant la vitesse du son dans les conditions de l'expérience, vitesse qu'il est d'ailleurs inutile de connaître pour obtenir l', car la comparaison des équations précédentes donne immédiatement

$$4N_1(L_1 + l') = 4N_2(L_2 + l') = \cdots,$$

d'où

$$l' = \frac{N_2L_2 - N_1L_1}{N_1 - N_2} = \frac{N_3L_3 - N_2L_2}{N_2 - N_3} = \cdots$$

Wertheim trouve en effet pour l' un nombre constant à 1/20 près,

[1] WERTHEIM, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXIII, 434; et XXXI, 385; 1848-51.

le rayon R du tuyau restant le même. Si ce rayon varie, la constante varie, et l'on peut poser $l' = 0,746\,R$ [1].

Théorie de M. von Helmholtz [2]. — M. von Helmholtz, le premier, a établi une théorie exacte des tuyaux sonores, sans introduire aucune hypothèse sur l'état de l'air aux extrémités. Suivant cette théorie, quand un tuyau cylindrique étroit débouche au fond d'un deuxième tuyau extrêmement large, la correction au point où s'ouvre le tuyau étroit est 0,82 R.

Lorsque le tuyau s'ouvre dans un espace libre en tous sens (et non plus limité en arrière par un plan indéfini), la correction doit être réduite, d'après les expériences de lord Rayleigh [3], d'environ 0,2 R, ce qui donne sensiblement 0,6 R, la longueur d'onde du son produit étant toujours supposée très grande par rapport au diamètre du tuyau.

Dès qu'il n'en est plus ainsi, le phénomène se complique comme l'avait déjà reconnu Zamminer [4].

Recherches de M. Bosanquet [5] *et de M. Kœnig* [6]. — Selon M. Bosanquet la fraction de R exprimant la correction croît avec le rapport du diamètre à la longueur d'onde. Sur deux tuyaux ouverts il trouve en effet pour la correction à l'une des extrémités

$$0,635\,R \quad \text{avec} \quad \frac{R}{\lambda} = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad 0,543\,R \quad \text{avec} \quad \frac{R}{\lambda} = \frac{1}{20}$$ [7].

D'autre part, M. Kœnig, opérant sur les sons successifs du tuyau à tube explorateur décrit plus haut (360), observe que le raccourcissement absolu de la première demi-onde diminue quand le son s'élève, moins vite toutefois que la longueur d'onde ; quant au raccourcissement beaucoup plus faible de la dernière demi-onde, il varie peu.

Les deux tableaux suivants renferment les résultats obtenus ainsi : 1° sur le tuyau ouvert; 2° sur le même tuyau bouché, la

(1) Les résultats obtenus par Wertheim oscillent entre 0,638 R et 0,862 R ; moyenne 0,746 R.

(2) Helmholtz, *loc. cit.*

(3) Lord Rayleigh, *loc. cit.*, II, 188.

(4) Zamminer, *Pogg. Ann.*, XCVII, 183; 1856.

(5) Bosanquet, *Phil. Mag.*, (5), IV, 219; 1877.

(6) Kœnig, *loc. cit.*

(7) M. Blaikley obtient sur un tuyau étroit un nombre tout semblable 0,576 R (Blaikley, *Phil. Mag.* (5), VII, 339; 1879).

longueur de la colonne d'air étant alors réduite à 2ᵐ,28. On y a indiqué, pour chaque son, le numéro d'ordre k, le nombre des vibrations simples mesuré $2N$, et la demi-longueur d'onde mesurée $\frac{\lambda}{2}$.

Tuyau ouvert						Tuyau fermé					
Sons			Corrections			Sons			Corrections		
k	$2N$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{r}{2}$	$l=\frac{s+r}{2}$	k	$2N$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{r'}{2}$	$l'=\frac{s+r'}{2}$
	v.s	mm	mm	mm	mm		v.s	mm	mm	mm	mm
III	376	900	280	90	370	V	332	1035	270	75	345
IV	512	658	246	56	302	VII	476	707	191	7	198
V	656	513	198	36	234	IX	620	549	182	19	201
VI	800	425	162	57	219	XI	768	449	174	29	203
VII	936	365	157	67	224(*)	XIII	»	»	»	»	» (*)
VIII	1080	314	141	43	184	XV	1048	324	144	14	158
						XVII	1198	282	112	12	124

(*) On eut beaucoup de peine à tenir convenablement le son VII du tuyau ouvert, et plus encore le son XIII du tuyau bouché : sur ce dernier on dut renoncer à toute mesure.

Plus d'une difficulté reste à résoudre.

362. Amplitude du mouvement et variation de la pression de l'air dans un tuyau sonore. — Il convient d'indiquer encore ici les expériences récentes par lesquelles on a cherché à déterminer avec exactitude l'état de l'air dans les différentes régions du tuyau et particulièrement aux points notables, en mesurant les déplacements aux ventres, les pressions aux nœuds.

Observations de M. Kundt avec son manomètre à soupape [1]. — M. Kundt évalue la pression avec un manomètre à eau. Mais les accroissements et les diminutions de la pression se succèdent trop rapidement dans l'air en vibration sonore pour qu'une colonne d'eau puisse suivre ces variations de sens opposés. Il faut donc joindre au manomètre une soupape qui ne laisse agir que les variations de signe donné. Dans l'appareil de M. Kundt, cette soupape était constituée simplement par une lame de caoutchouc

(1) Kundt, *Pogg. Ann.*, CXXXIV, 163; 1868.

tendue contre une fente étroite. Si la lame élastique était placée du côté du manomètre, la soupape s'ouvrait à chaque compression, et l'eau était refoulée dans la deuxième branche du manomètre jusqu'à ce que la dénivellation produite fît équilibre à la pression maximum. Si la soupape était tournée en sens contraire, le manomètre accusait la dépression maximum pendant la dilatation. Avec cet appareil, M. Kundt observa à l'extrémité d'un tuyau fermé de 30^{cm} de longueur, sonnant fort, des dénivellations de 30^{cm}, atteignant pour la variation totale de la pression 60^{cm} ou $1/17$ d'atmosphère. Au nœud d'un tuyau ouvert, la différence de niveau dans les deux branches du manomètre ne se montra qu'environ moitié de la précédente. Toutefois le manomètre à soupape comporte plus d'une incertitude, comme l'a constaté M. Dvorák [1], qui, avec le même appareil, n'a plus trouvé que 5^{cm} d'eau pour l'excès maximum de pression, c'est-à-dire environ $1/100$ d'atmosphère pour l'écart total entre les pressions extrêmes, au fond d'un tuyau en bois de 27^{cm} de longueur sur $2^{cm},4$ de largeur et $2^{cm},8$ de profondeur, parlant sous une pression de $5^{cm},5$ d'eau.

Méthode stroboscopique. — On doit à Plateau [2] une méthode excellente pour étudier les différents états d'un corps en phénomène périodiquement variable. C'est la méthode stroboscopique (στρόβος tournoiement, σκοπέω examiner), dont nous avons déjà vu une application dans l'examen des gouttes de la veine liquide (256). D'une manière générale, le corps est regardé à travers les fentes d'un disque tournant, ou bien il est éclairé par une lumière intermittente dont les éclats se succèdent à intervalles égaux. Si ces intervalles coïncident avec la période du phénomène considéré, celui-ci paraîtra invariable dans l'état même où le saisit chaque fois la lumière, la persistance des impressions sur la rétine produisant pour l'observateur une continuité apparente. Si les éclats de lumière s'éloignent un peu, le phénomène se déroule lentement dans son sens naturel, en laissant à l'œil tout le temps de l'observer.

(1) Dvorák, *Pogg. Ann.*, CL, 410; 1873.

(2) Plateau, *Correspondance math. et phys. de l'Observatoire de Bruxelles*; 1832; *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LIII, 304; 1833; et *Bulletin de l'Académie de Belgique*, III, 364; 1836.

Soit τ la période du phénomène considéré, τ' l'intervalle de temps entre deux éclairements successifs, le deuxième éclair saisit le corps dans l'état qui suit, au bout de $\tau' - \tau$, celui où le corps était lors du premier éclair ; et les différentes phases du phénomène se succèdent dans le temps $\frac{1}{\tau' - \tau}$. Si τ' était un peu inférieur à τ, le phénomène se développerait en entier, mais à rebours, durant le temps $\frac{1}{\tau - \tau'}$.

Expériences de MM. Töpler et Boltzmann. — MM. Töpler et Boltzmann [1], ont appliqué cette méthode à la mesure de la densité de l'air dans un tuyau de la manière suivante : un diapason, placé horizontalement et tourné de sorte que son plan d'oscillation soit vertical, porte sur chaque branche un petit écran percé d'une fente horizontale étroite. Lorsque le diapason vibre, les deux écrans glissent l'un devant l'autre ; et à chaque vibration les deux fentes se trouvent deux fois en regard pendant un temps très court. Elles laissent alors passer un faisceau de rayons lumineux venant d'une fente horizontale fixe, et qui va ensuite traverser la partie supérieure d'un tuyau sonore vertical, dont les parois sont constituées par des glaces parallèles et le fond par une plaque métallique horizontale bien dressée. Au-dessus de ce fond, passe un deuxième faisceau venant de la même fente et cheminant dans l'air en repos. Les deux faisceaux tombent ensuite sur un appareil d'interférence (biprisme à arête horizontale) qui donne un système de franges que l'on reçoit sur un appareil micrométrique. Si la période des éclats lumineux diffère extrêmement peu de celle du son émis par le tuyau (en d'autres termes, si le diapason est très sensiblement à l'octave grave du tuyau), la frange centrale oscille lentement, et de l'amplitude de son déplacement on peut déduire la variation de la densité dans la couche traversée par le faisceau intermittent. Pour obtenir un effet suffisant, il est nécessaire toutefois, par des réflexions convenables, de multiplier les passages à travers les deux couches d'air à comparer : après 11 passages le déplacement fut de 5 franges, correspondant à un écart entre les densités extrêmes égal aux 0,00888 de la densité normale. En tenant compte de la variation concomitante

[1] Tœpler et Boltzmann, *Pogg. Ann.*, CXLI, 321 ; 1870.

de la température, on conclut de là que l'écart entre les pressions extrêmes était de 0,00888 × 1,41, soit 1/80 d'atmosphère. Le tuyau employé avait 36^{cm} de long, sa largeur était $5^{cm},85$ et sa profondeur $5^{cm},2$: il émettait un son fondamental de 181 vibrations par seconde.

Si l'on suppose que le déplacement ξ d'une molécule d'air située à la distance x du fond puisse se représenter par

$$\xi = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

de la valeur connue de la condensation au fond on déduit

$$\frac{4\pi a}{\lambda} = 0,00888;$$

d'où, λ étant égal à 188^{cm},

$$a = 0^{cm},133.$$

Le déplacement de la tranche d'air située au voisinage de l'embouchure, où $x = 36$, est donc

$$\begin{aligned} \xi &= 0,133 \sin 2\pi \frac{36}{188} \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \\ &= 0,125 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}, \end{aligned}$$

et l'amplitude de l'écart total est $0^{cm},25$.

Travaux de M. Mach. —M. Mach [1] a étendu ces recherches aux tuyaux ouverts. En disposant au nœud une membrane un peu lâche, qui arrête le courant d'air sans gêner le mouvement vibratoire, et en rendant le gaz visible au moyen de fumées, il a pu mesurer directement l'amplitude des oscillations aux divers points

[1] MACH, *Optisch-akustichen Versuche*. Prag; 1873; et *Journal de physique*, II, 112, 306 et 338; 1873 (Crova).

du tuyau, depuis la membrane nodale jusqu'à l'extrémité ouverte, où il l'a trouvée de $0^{cm},4$ dans un tuyau de 4 pieds.

363. Tuyaux larges. — Les lois de Bernoulli ne conviennent qu'aux tuyaux très étroits ; elles sont complètement en défaut pour les tuyaux larges.

Exceptions aux lois de Bernoulli. — 1° Le tableau de la page 139 montre que dans le tuyau, médiocrement large, dont s'est servi M. Kœnig, les sons supérieurs ne suivent pas la loi des harmoniques : le son VIII dépasse le huitième harmonique de près d'une seconde, de sorte qu'il coïncide presque avec le neuvième harmonique. Déjà Wertheim avait remarqué qu'en déterminant le son fondamental d'un tuyau d'orgue au moyen d'un son supérieur, on obtenait un nombre d'autant plus grand que le son était d'un rang plus élevé.

2° Mersenne est parvenu à faire descendre de 7 tons entiers le son fondamental d'un tuyau, sans changer la longueur du tuyau ($72^{lignes} = 161^{mm}$), en augmentant seulement le diamètre, comme l'indique le tableau suivant, où l'on a représenté arbitrairement par *ut* le son le plus élevé.

diamètre	3^{li}	6^{li}	12^{li}	18^{li}	25^{li}	51^{li}
	7^{mm}	14^{mm}	27^{mm}	41^{mm}	56^{mm}	115^{mm}
son rendu	*ut*	la_{-1}	sol_{-1}	mi_{-1}	$ut\sharp^{-1}$	$la\sharp^{-2}$

Règles de Savart, de M. Cavaillé-Coll. — Savart [1] a étudié particulièrement le cas des tuyaux rectangulaires. Appelons toujours *longueur* la grande dimension du tuyau, et dans la section normale à la longueur nommons *largeur* la dimension parallèle à l'embouchure et *profondeur* la dimension perpendiculaire.

Savart a d'abord reconnu que la largeur était sans influence sur la hauteur du son, pourvu que le tuyau fût embouché dans toute la largeur [2].

(1) SAVART, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIX, 404 ; 1825.

(2) Si l'on diminue la largeur de la bouche, on baisse le ton : c'est ainsi que l'on accorde les tuyaux fermés, à l'aide des *oreilles*, lames flexibles

Ainsi tout se passe de même dans chaque lame perpendiculaire à la bouche ; et Savart a montré que si dans deux tuyaux différents ces lames ont même surface, le ton est le même, pourvu que la profondeur soit supérieure au 1/6 de la longueur. Tel est le cas, par exemple, pour les trois tuyaux figurés ici.

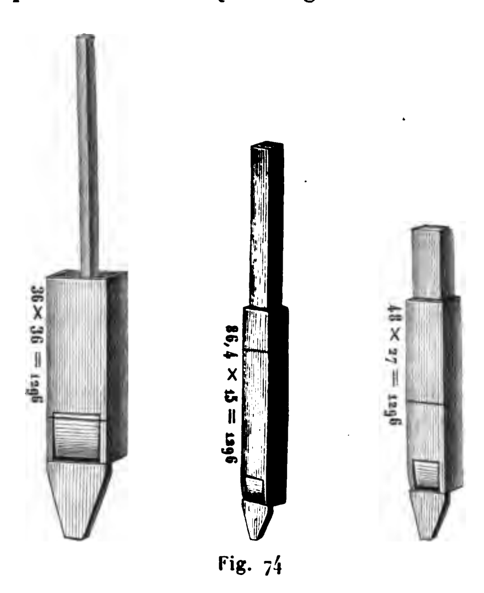


Fig. 74

Si les surfaces sont inégales, les nombres de vibrations sont inversement proportionnels aux racines carrées des surfaces, tant

placées de chaque côté de la bouche. La direction de la lame d'air sortant de la lumière est d'ailleurs sans influence : deux tuyaux de mêmes dimensions et

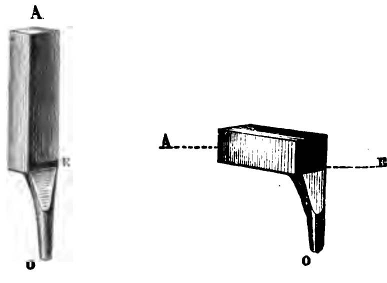


Fig. 75

embouchés, l'un suivant la largeur, l'autre par côté, donnent exactement la même note.

que la profondeur est plus grande que le 1/6 de la longueur.

La profondeur diminuant, l'influence de cette dimension se fait de moins en moins sentir, et quand elle est devenue moindre que le 1/12 de la longueur, la hauteur du son ne dépend plus sensiblement que de la longueur, conformément à la loi de Bernoulli.

Pour leurs tuyaux dont le côté est ordinairement compris entre le 1/12 et le 1/6 de la longueur, les facteurs d'orgues n'ont que des règles empiriques.

M. Cavaillé-Coll ajuste la longueur L′ d'un tuyau ouvert d'après l'une des formules suivantes, qui conviennent dans des limites très étendues :

$$L' = L - 2p$$ pour un tuyau rectangulaire de profondeur p,

et

$$L' = L - \frac{5}{3}d$$ pour un tuyau rond de diamètre d,

L étant la longueur théorique.

Dans tous les cas, si, sur le tuyau A rendant le son fondamental, on monte un prolongement a tel que le son ne soit pas modifié, la

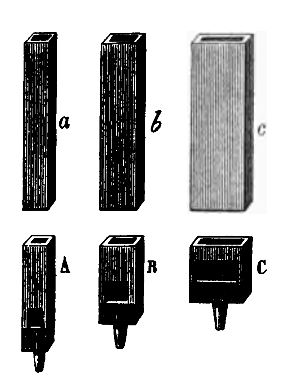


Fig. 76

longueur de ce prolongement est indépendante de la longueur primitive que l'on a dû donner au tuyau A, B ou C, d'après ses dimensions transversales, pour lui faire rendre le son proposé. En d'autres termes, la correction à l'extrémité libre, toujours faible relativement à celle qui se rapporte à l'embouchure, ne varie pas sensiblement avec la section de l'instrument, tandis que cette section

influe considérablement sur la longueur première que doit avoir le tuyau.

Tuyaux semblables. — Les tuyaux semblables obéissent à une loi très simple, découverte par Mersenne : « Si, dit-il, l'on donne 22 lignes de diamètre au tuyau de 1 pied de hauteur, il sera exactement à l'octave avec un tuyau de 1/2 pied de hauteur, dont le diamètre est de 11 lignes [1]. »

Savart a vérifié avec des tuyaux des formes les plus diverses l'exactitude de la loi qui peut se formuler ainsi :

Des tuyaux semblables, embouchés semblablement, engendrent des sons dont les hauteurs sont en raison inverse des dimensions homologues.

La figure ci-contre représente une collection de paires de tuyaux semblables, dont les dimensions homologues sont entre elles comme

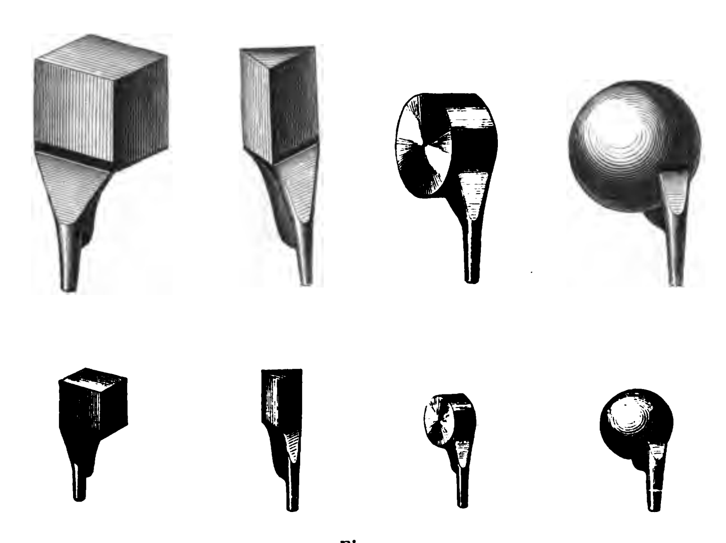


Fig. 77

1 et 1/2 : le plus petit tuyau de chaque couple donne l'octave aiguë du son que produit le plus gros.

La loi est absolument générale et s'applique à tous les systèmes vibrants, comme nous le verrons par la suite.

[1] MERSENNE, *loc. cit.*, liv. VI, 335.

364. Tuyaux à anche. — On emploie beaucoup en musique une sorte de tuyaux sonores où l'air est mis en vibration au moyen d'une pièce particulière, nommée *anche*.

Dans les tuyaux d'orgue à anche, celle-ci est constituée par une

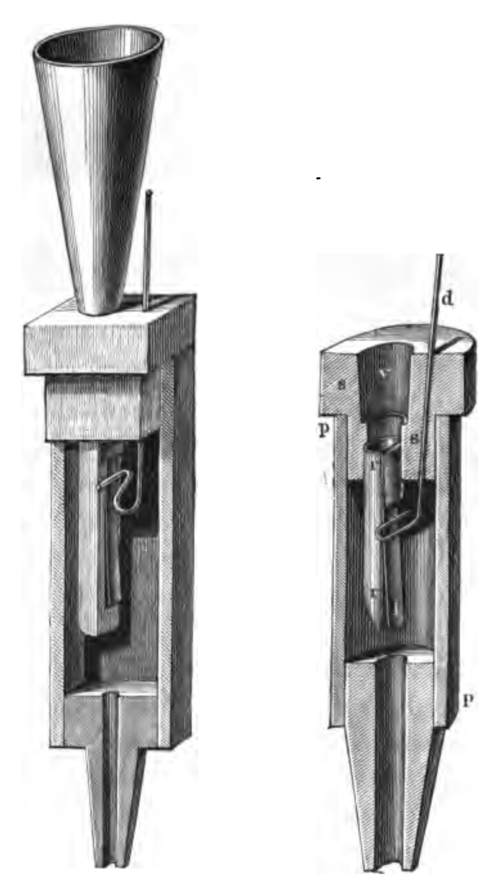


Fig. 78

lame métallique ou *languette*, *l*, fixée par un bout, et dont la partie libre est limitée par un crochet mobile *d*, nommé *rasette*. Cette lame en oscillant ouvre et ferme alternativement une ouverture ménagée dans une *rigole* demi-cylindrique *r*, fixée à la partie supérieure du *pied* PP. Autrefois, l'anche venait battre sur les bords de la rigole (*anche battante*), ainsi qu'on le voit sur le tuyau de droite, mais le choc donnait au son une dureté que Grenié a fait

disparaître en rendant l'*anche libre*, comme sur le tuyau de gauche [1] : l'anche peut alors osciller librement à travers l'ouverture qu'elle ferme dans sa position d'équilibre. La figure 79 montre le détail de cette disposition employée seule aujourd'hui : quand l'anche est en z_1, l'air comprimé dans le pied peut sortir librement au dehors; quand elle est en z_2, le courant d'air est

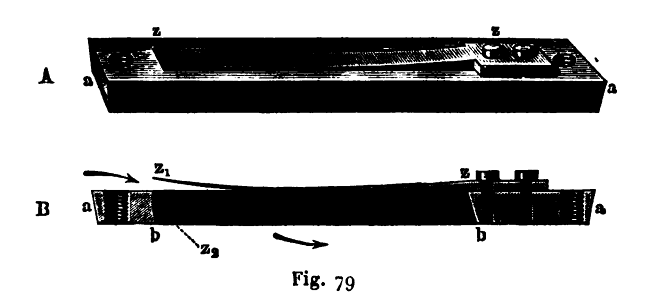


Fig. 79

arrêté. Le jeu de l'appareil est exactement comparable à celui de la sirène : la seule différence consiste dans la manière dont l'orifice d'échappement est alternativement ouvert et fermé : dans la sirène c'est la rotation du disque mobile qui produit cet effet; ici c'est le mouvement oscillatoire de la languette. Le rôle de l'anche est donc purement mécanique, et le corps vibrant est encore l'air.

Dans une colonne d'air en vibration les variations maxima de la pression se produisent aux nœuds; un tuyau à anche se comportera donc comme un tuyau bouché au point où se trouve l'anche et donnera la série des sons 1, 3, 5, 7,... à condition, bien entendu, que la longueur du tuyau soit dans un rapport convenable avec le nombre de vibrations que l'anche tend à exécuter en vertu de son élasticité propre. Toutefois, le tuyau étant assez large, il y a une certaine tolérance que l'on peut encore augmenter en faisant une partie de l'une des parois en peau. Si la différence est trop grande, le tuyau refuse de parler.

Avec une anche métallique rigide, comme celle d'un tuyau d'orgue, la hauteur du son est presque uniquement réglée par l'anche. Il faut alors un tuyau pour chaque note, et le réglage s'ef-

[1] Ce tuyau est surmonté en outre d'un *cornet* destiné à renforcer le son.

fectue au moyen de la rasette. Mais ordinairement la hauteur du son dépend à la fois de l'anche et du tuyau.

On peut partager les anches en deux catégories : les *anches en dedans*, qui s'ouvrent vers l'intérieur de l'instrument d'où sort le vent, ainsi que dans les tuyaux d'orgue; les *anches en dehors*, qui s'ouvrent vers l'extérieur, comme les cordes vocales. Si à une anche en dedans on joint un tuyau, on obtient en général un son plus grave que celui que rendrait l'anche seule en vertu de son élasticité; au contraire, avec une anche en dehors, l'adjonction d'un tuyau a pour effet d'élever le son. W. Weber [1], qui a étudié longuement cette question, prit une anche donnant isolément le même son qu'un tuyau de longueur $l = 440^{mm},5$, c'est-à-dire un sol_3 de 388^v, et la mit en dedans d'un tuyau de longueur croissante : le tuyau étant d'abord très court, la hauteur du son n'éprouva aucune modification sensible; le tuyau s'allongeant, elle baissa graduellement et quand le tuyau atteignit une longueur peu inférieure à l, le son était tombé à l'octave grave; il remonta ensuite brusquement à sa valeur primitive quand la longueur du tuyau devint égale à l, comme le montre le tableau suivant :

Longueur du tuyau.	Son.	Longueur du tuyau.	Son.
41	sol_3	252	$ré_3$
56	sol_3	290	ut_3
92	sol_3	331	$la_2\#$
128	$fa_3\#$	370	$sol_2\#$
187	fa_3	394	sol_2
212	mi_3	439	sol_3

Le tuyau continuant à être allongé, le son baissa de nouveau, et pour une longueur de 866^{mm}, peu inférieure à $2l = 881^{mm}$, il était descendu à $ré_3$, c'est-à-dire à la quarte ; puis il reprit brusquement sa valeur première sol_3 quand la longueur du tuyau fut $2l$. La longueur du tuyau croissant toujours, le son descendit au mi_3, soit à la tierce mineure, pour revenir au sol_3 quand la longueur se trouva $3l$, et ainsi de suite. Le son remontait à sa hauteur primitive chaque fois que la longueur du tuyau devenait un multiple exact de la longueur l, en d'autres termes, chaque fois que cette longueur était

[1] W. WEBER, *Pogg. Ann.*, XIV, 397; XVI, 415; XVII, 193; 1828-29.

telle que l'un des sons propres du tuyau fût à l'unisson du son de l'anche isolée, et chaque fois ce retour s'effectuait par un saut brusque, qui fut successivement :

D'une octave	1 : 2
D'une quarte.	3 : 4
D'une tierce	5 : 6

L'anche des instruments en bois est constituée par une ou deux lames flexibles [1], dont les vibrations sont tellement influencées par celles du tuyau, que c'est en réalité la longueur de celui-ci qui détermine la hauteur du son. Le son propre de l'anche, variable avec le degré d'humidité, est beaucoup plus aigu que les sons que l'on utilise et qui sont ceux d'un tuyau fermé au point où se trouve l'anche. La clarinette dont le tuyau est cylindrique donnera donc la série des sons 1, 3, 5, 7,..., sans parler de ceux que l'on obtient en ouvrant les trous percés en différents points. Avec le hautbois ou le basson on a la série des sons d'un tuyau conique fermé au sommet, lesquels sont exactement les mêmes que ceux d'un tuyau cylindrique ouvert de même longueur, savoir : 1, 2, 3, 4, 5,... [2].

Il existe enfin une troisième sorte d'anches, les anches membraneuses, dont on peut aisément étudier les propriétés au moyen de l'appareil ci-contre, dû à M. von Helmholtz, et qui consiste simplement en deux lames de caoutchouc, tendues sur les bords coupés obliquement d'un tube de bois ou de caoutchouc épais, de manière à laisser entre elles une fente étroite. Si le courant d'air est dirigé ainsi que l'indique la figure, l'appareil fonctionne comme une anche en dedans. En changeant le sens du courant d'air, on aura une anche en dehors, semblable aux lèvres dans les instruments de cuivre ou aux cordes vocales dans le gosier. Molles et flexibles, les lèvres obéissent aisément aux variations de pression relativement considérables qui se produisent au fond des instruments en cuivre;

(1) La clarinette est munie d'une anche large qui battrait si l'amplitude des oscillations était plus grande, mais qui en réalité ouvre plus ou moins largement l'entrée de l'air sans jamais la fermer complètement. Dans le hautbois et le basson, l'embouchure est formée par deux lames minces laissant entre elles une fente qui se ferme à chaque oscillation. Toutes ces anches sont en dedans.

(2) Helmholtz, *Pogg. Ann.*, CXIV, 321 ; 1861 ; et *Théorie physiologique de la musique*, 132 et 507.

la hauteur des sons dans ces instruments est donc déterminée uniquement par les tuyaux. Ainsi le cor de chasse et la trompette, qui sont de longs tubes coniques embouchés près du sommet, donnent la série des harmoniques naturels et pas d'autres sons [1], tant du



Fig. 80

moins que l'on n'emploie aucun artifice changeant la disposition du tube, comme, par exemple, d'enfoncer le poing dans le pavillon du cor pour modifier certains sons. Dans ces instruments les lèvres agissent sur l'émission de l'air de manière à obtenir tel ou tel son déterminé, sans influer notablement sur la hauteur de ce son. Dans le gosier humain, au contraire, la hauteur du son est réglée par les cordes vocales dont la tension peut varier dans de larges limites, soit par l'écartement de leurs points d'attache aux cartilages du gosier, soit par le raccourcissement des fibres musculaires qu'elles contiennent, et dont l'épaisseur même semble pouvoir se modifier [2].

365. Tubes à flammes. — Les vibrations d'un tuyau sonore peuvent être excitées par le frémissement d'une flamme, comme le prouve l'*harmonica chimique* dont la première observation semble due à Higghins [3]. Chladni [4] montra que cet appareil donne pré-

(1) Le tube du cor de chasse, dit M. von Helmholtz d'après Zamminer, a $27^{pi} = 8^{m},77$, de long; le son fondamental est proprement le $mi_{-1}\flat$, qui n'est pas employé, non plus que son premier harmonique $mi_1\flat$; les sons dont on fait usage sont $si_1\flat$, $mi_2\flat$, sol_2, $si_2\flat$, $ré_3\flat$, $mi_3\flat$, fa_3, sol_3, $la_3\flat$, la_3, $si_3\flat$, etc.

(2) Voir Helmholtz, *loc. cit.*, p. 133.

(3) Higghins, *Nicholson's Journal*, I, 129 ; 1802.

(4) Chladni, *Traité d'acoustique*, 85. Paris, Courcier; 1809.

cisément les sons propres du tuyau à la température actuelle de la colonne vibrante; et en réglant la longueur de la flamme, ainsi que la position du tube, il obtint sans peine le son fondamental, l'octave et la douzième. Quand le tube parle, le frémissement incertain de la flamme se change en pulsations rythmées sur celles du tube : Wheatstone les a rendues manifestes au moyen d'un



Fig. 81

miroir tournant, qui offre de la flamme une série d'images équidistantes, séparées par des intervalles paraissant complètement obscurs ([1]). L'action du tuyau sur la flamme peut même être assez énergique pour en amener l'extinction. Le comte Schaffgotsch ([2]) et M. Tyndall ([3]) ont fait voir qu'un tube, sur le point de parler, peut être mis en vibration par la voix ou un instrument quelconque donnant à distance le son du tube ([4]), et qu'inversement un éclat de voix peut réduire au silence un tube qui chante.

([1]) La méthode stroboscopique a permis à Tœpler d'étudier les transformations successives de la flamme entre ses états extrêmes (Tœpler, *Pogg. Ann.*, CXXXVIII, 108 et 126; 1866).

([2]) Comte Schaffgotsch, *Pogg. Ann.*, C, 352; 1857.

([3]) Tyndall, *Phil. mag.*, (4), XIII, 473; 1857.

([4]) L'expérience réussit également bien avec un tuyau d'orgue dont l'embouchure est réglée de façon que l'instrument soit près de chanter.

De la Rive [1], ayant chauffé une boule contenant un peu d'eau et surmontée d'un tube capillaire, et ayant ainsi obtenu un son évidemment dû à la condensation périodique de la vapeur dans le tube, attribua à la même cause la production du son dans l'harmonica chimique. Faraday [2] montra que cette explication était inexacte en plaçant le tube dans une enceinte chauffée à plus de 100°, et aussi en remplaçant l'hydrogène par de l'oxyde de carbone, dont la flamme ne donne lieu à aucune vapeur condensable; et il regarda le son comme provenant d'une série d'explosions : le gaz inflammable, entraîné par le courant d'air, forme avec cet air un mélange qui détone, est remplacé par une nouvelle quantité de mélange qui détone à son tour, et ainsi de suite. Cette manière de voir rend compte des apparences de la flamme dans le miroir tournant. Elle est confirmée d'ailleurs par l'expérience de Martens [3] : une toile métallique, placée dans le tube immédiatement sur la flamme de façon à empêcher les détonations, supprime le son.

Les explosions successives peuvent donner naissance à des sons d'une grande intensité. Avec la flamme d'un grand bec Bunsen livrant passage au gaz par une sorte de pomme d'arrosoir et un long tuyau de $4^m,50$, M. Tyndall obtient un son d'une puissance extraordinaire; en modérant la flamme on fait entendre le premier harmonique; en la réduisant encore on amène le second; si on laisse arriver tout le gaz, le son fondamental et ses harmoniques éclatent ensemble en produisant « un véritable ouragan musical ». Dans d'autres conditions, ces tubes à flammes rendent des sons très harmonieux, que l'on a cherché à utiliser en musique. M. Kastner [4] a construit sous le nom de *pyrophone* une sorte d'orgue dont le jeu est établi sur ce fait que si l'on place dans un même tuyau, au tiers de la hauteur, deux petites flammes en contact, le tuyau reste muet, tandis qu'il se met à parler dès qu'on les sépare.

[1] De la Rive, *Journal de physique de De la Métherie*, LV, 165; 1802. Les *tubes à boule* ont été étudiés expérimentalement par Pinaud et Sondhaus, la théorie en a été donnée par M. Bourget (Pinaud, *Mém. de l'Ac. de Toulouse*, V; et *Institut*, III, 366 ; 1835; Sondhauss, *Pogg. Ann.*, LXXIX, 1 et CXL, 53 et 219; 1850-70; Bourget, *Ann. de l'Éc. norm.*, (1), IV, 1867).

[2] Faraday, *Quarterly Journal of science*, V, 274; 1818; et *Annales de chim. et de phys.*, VIII, 363; 1818.

[3] Martens, *Bulletin de l'Académie des sciences de Bruxelles*, VI, part. 2, 442; 1839.

[4] Kastner, *C. R.*, LXXVI, 699; 1873.

366. Flammes sensibles. — En 1858, M. Leconte [1] observa que les flammes du gaz dans une salle de concert exécutaient des bonds à certaines notes, particulièrement à celles du violoncelle, accusant les trilles de cet instrument avec une telle perfection qu' « un sourd aurait pu voir l'harmonie ». Il reconnut en même temps que pour être sensible une flamme devait, par l'effet d'une pression suffisante, être sur le point de ronfler. C'est là en effet la condition essentielle du phénomène. La sensibilité d'une flamme dépend d'ailleurs de la forme du bec, de la largeur des tuyaux de conduite (l'interposition d'un robinet dans le voisinage du bec peut rendre une flamme absolument réfractaire), des notes enfin que l'on donne (une flamme est sensible aux sons qu'elle est elle-même sur le point d'émettre). Toutes ces circonstances ont été étudiées en détail par MM. Tyndall [2] et Barrett [3]; nous rapporterons quelques-unes de leurs expériences les plus remarquables [4].

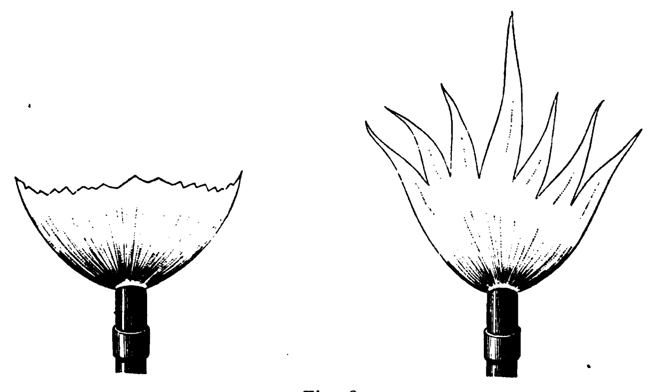


Fig. 82

Une flamme en aile de chauve-souris (fig. 82), alimentée par un petit gazomètre sous une pression plus forte que celle des gazomètres de la ville, s'allonge en même temps qu'elle se divise en sept langues à chaque coup qu'un marteau frappe sur une enclume éloignée.

(1) LECONTE, *Silliman's Journal*, XXV, 62; et *Phil. mag.*, (4), XV, 235; 1858.
(2) TYNDALL, *Phil. mag.*, (4), XXXIII, 92; 1867.
(3) BARRETT, *Phil. mag.*, (4), XXXIII, 216 et 287; 1867.
(4) Voir TYNDALL, *On Sound*, 250.

Une longue flamme droite et brillante (fig. 83) s'affaisse en perdant tout éclat au bruit d'un trousseau de clefs. Les diverses voyelles l'affectent différemment : OU est sans effet, E ébranle et A écrase cette *flamme aux voyelles :* la sifflante S la terrasse complètement.

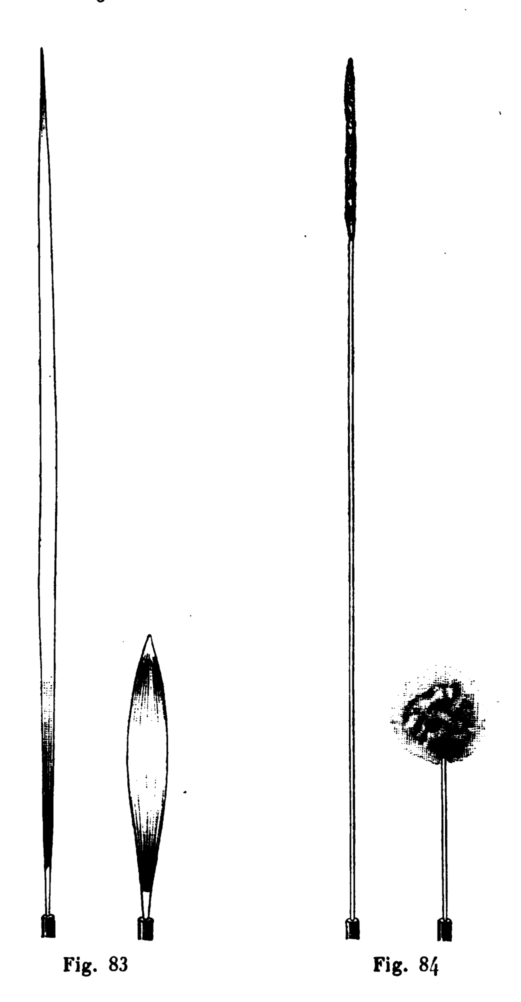


Fig. 83 Fig. 84

Certaines flammes sont plus sensibles aux sons graves; d'autres aux sons aigus. D'ailleurs la communication des vibrations se manifeste tantôt par un allongement, tantôt par un raccourcissement.

La flamme peut être remplacée par une colonne de fumée (fig. 84) et en général par un jet de gaz froid : pour rendre alors le phéno-

mène visible, M. Govi [1] projette l'ombre du jet sur un écran. On accroît la visibilité en faisant passer le gaz dans un flacon contenant de la ponce imbibée d'une essence qui en augmente le pouvoir réfringent (Lissajous). Si alors on produit un son à distance, on voit la partie limpide de la veine se raccourcir comme dans les expériences de Savart sur la veine liquide (256).

On peut aussi employer une flamme de gaz d'éclairage sous la pression ordinaire de ce gaz au moyen de l'artifice suivant, dû à M. Govi [2] : le gaz, sortant par un petit trou, rencontre une toile métallique serrée, au-dessus de laquelle on l'enflamme ; on soulève la toile jusqu'au moment où la flamme s'étale en perdant son éclat ; il suffit alors d'abaisser la toile un tant soit peu au-dessous de cette position pour communiquer à la flamme une sensibilité telle que le plus faible bruit de hauteur convenable l'étale en la faisant ronfler. Le ronflement est beaucoup plus fort quand on place, comme M. Geyser [3], un tube au-dessus de la toile. Avec un tube vertical de cuivre de 4^{cm} de diamètre et 15 à 20^{cm} de hauteur, fermé à sa partie inférieure par une toile métallique et disposé à quelque distance au-dessus d'un bec Bunsen, Lissajous [4] obtint en allumant le gaz dans le tube un son aigu presque aussi intense que celui d'un sifflet de locomotive [5].

367. Mesure de la vitesse du son dans les gaz au moyen des tuyaux sonores. — Les tuyaux sonores se prêtent à une mesure indirecte, très précieuse, de la vitesse du son dans les gaz.

La formule fondamentale

$$\lambda = V\tau = \frac{V}{N}$$

(1) Govi, *Atti della reale Accademia della science di Torino*, V, 475 ; 1870, et *Journal de physique*, II, 29 ; 1873 (Lissajous).

(2) Govi, *ibid.*, 394 ; et *Journal de physique, loc. cit.* Cf. Neyreneuf, *Journal de physique*, IX, 280, et X, 127 ; 1880-81.

(3) Geyser, *American journal of science and arts*, (3), III, 340 ; 1872.

(4) Lissajous, *Journal de physique*, II, 98 ; 1873.

(5) Un appareil semblable avait déjà été employé par Rijke d'une autre manière : dans un tube de verre était introduite une toile métallique que l'on chauffait au rouge avec une lampe à alcool, puis on retirait la lampe ; un son se produisait alors, le passage à travers la toile chaude amenant dans la colonne gazeuse une série de secousses périodiques (Rijke, *Pogg. Ann.*, CVII, 339 ; 1859).

montre en effet que si l'on peut mesurer dans le gaz proposé la longueur d'onde λ d'un son de hauteur connue N, on en déduira immédiatement la vitesse V du son dans ce gaz. Or les tuyaux sonores nous permettent de déterminer λ, N étant donné d'autre part, ils fournissent donc indirectement V.

Recherches de Dulong (1). — En 1829, Dulong entreprit une série de recherches fondées sur ce principe.

Il essaya d'abord d'évaluer la vitesse du son dans l'air en mesurant sur divers tuyaux ouverts, rendant leur son fondamental, la hauteur N du son et la longueur L du tuyau ; il admit que cette longueur L était égale à la demi-longueur d'onde du son N, et il calcula en conséquence V au moyen de la formule

$$V = 2LN.$$

Il trouva ainsi des nombres beaucoup trop faibles (360).

Il fit alors rendre aux tuyaux leur premier harmonique et il mesura au moyen d'un piston la distance d des deux nœuds qui se forment dans ces conditions ; cette distance représentait $\frac{\lambda}{2}$; la hauteur N′ du son étant prise à la sirène, la formule

$$V = 2dN'$$

lui donna V. Les nombres furent meilleurs sans être satisfaisants : les écarts atteignaient encore 10^m en valeur absolue.

Fig. 85

Cependant la méthode des concamérations est exacte dans son principe, et nous avons vu plus haut que la mesure même des concamérations était susceptible d'une certaine précision.

S'il n'obtint pas ainsi une valeur exacte de la vitesse du son dans l'air, Dulong n'en arriva pas moins à des résultats importants. Il reconnut en effet que la position des nœuds et des ventres dans un tuyau est indépendante de la nature du gaz vibrant. On n'avait dès lors qu'à mesurer les hauteurs des sons fournis par

(1) Dulong, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLI, 113; 1829.

les différents gaz parlant dans un même tuyau pour en déduire les vitesses relatives du son dans ces gaz. Dulong détermina donc, au moyen de la sirène, les nombres N,N′,N″,... des vibrations effectuées successivement par l'air et divers gaz dans un tuyau ouvert de 60cm de longueur; et, admettant que la vitesse du son dans l'air à 0° était 333m, il n'eut qu'à multiplier ce nombre 333 par les rapports $\frac{N'}{N}, \frac{N''}{N},\ldots$ pour avoir les vitesses du son dans les gaz soumis à l'expérience. Il obtint ainsi les nombres suivants :

Air....................	333m,00 (nombre admis).
Oxygène	317 ,15
Hydrogène	1 269 ,50
Oxyde de carbone........	337 ,40
Acide carbonique........	261 ,60
Protoxyde d'azote........	261 ,90
Gaz oléfiant	314 ,00

Mesures de Masson (¹). — Masson reprit ces expériences et opéra sur un grand nombre de gaz et de vapeurs. Le tableau suivant renferme quelques-uns de ses résultats :

Air....................	333m,00 (nombre admis).
Oxyde de carbone........	339 ,76
Acide carbonique........	256 ,83
Protoxyde d'azote........	256 ,45
Gaz oléfiant.............	318 ,73
Gaz des marais..........	431 ,82
Ammoniaque............	415 ,00
Vapeur d'eau............	401 ,00

Travaux de Wertheim (²). — D'autre part, pour compléter le travail de Dulong, Wertheim avait cherché à obtenir la mesure absolue de la vitesse du son, en évaluant, comme nous l'avons indiqué plus haut, la quantité dont il faut augmenter la longueur d'un tuyau donnant le son fondamental, pour la rendre égale à la longueur théorique $\left(\frac{\lambda}{2}\right.$ si le tuyau est ouvert, $\frac{\lambda}{4}$, s'il est fermé$\left.\right)$. Les dif-

(¹) Masson, *Ann. de chim. et de phys.* (3), LIII, 257; 1858.
(²) Wertheim, *loc. cit.*

férentes déterminations furent suffisamment concordantes (à 1/100 près en général) et le résultat final

$$a = 330^{m},9\ (^1)$$

ne diffère certainement pas beaucoup de la vraie valeur de la vitesse du son dans l'air libre à 0°.

Expériences de M. Kundt (²). — M. Kundt a donné une forme très élégante à la méthode des concamérations, en forçant celles-ci à se dessiner elles-mêmes par des lignes de poussière, semblables à celles que Chladni avait jadis fait surgir à la surface des corps solides en vibration.

L'appareil de M. Kundt, sous sa forme définitive, consiste en un

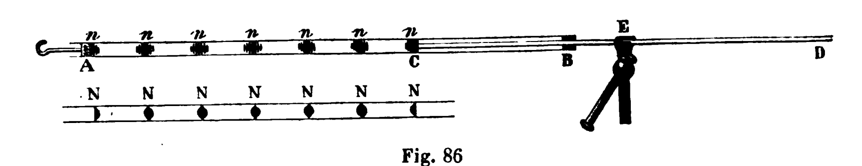


Fig. 86

long tube de verre AB, fermé à ses extrémités par des bouchons : l'un A, muni d'une petite tige qui permet de l'enfoncer ou de le retirer un peu ; l'autre B, fixe et traversé à frottement doux par une verge CD, terminée elle-même à l'intérieur du tube par un disque C d'un diamètre un peu moindre que le tube. Celui-ci a été préalablement saupoudré d'une poussière légère (lycopode, silice amorphe, ou mieux poudre de liège), et on n'en a laissé que juste ce qui adhérait aux parois (³). La verge étant saisie en son milieu dans un étau E, on l'excite longitudinalement, elle se met à vibrer exactement à la manière d'un tuyau ouvert aux deux

(¹) Ce nombre est légèrement supérieur à celui qu'obtint plus tard Regnault avec des tuyaux considérablement plus larges. Mais les sons employés ici étant beaucoup plus aigus, l'influence du diamètre était moindre (p. 68, note). Elle ressortait cependant déjà nettement : si en effet on réunit les nombres relatifs à un même diamètre, on trouve comme moyenne particulière :

Tuyau de	laiton	de 4^{cm}	de diamètre.....	$331^{m},89$
—	laiton	2	—	330 ,11
—	verre	2	—	329 ,98
—	laiton	1	—	329 ,12

(²) Kundt, *Pogg.*, *Ann.*, CXXVII, 497 ; CXXVIII, 337 ; et CXXXV, 337 et 527 ; 1866-68.

(³) Une quantité de poussière un peu grande retarde notablement le son.

bouts rendant le son fondamental; le disque C communique ses déplacements à l'air renfermé dans le tube, et la colonne gazeuse tend à se diviser en segments de longueur telle qu'ils puissent chacun vibrer à l'unisson de la verge. Mais, pour que cette division puisse se produire effectivement, il faut que la longueur de la colonne CA soit un multiple exact de la demi-longueur d'onde du son considéré dans l'air. C'est pour obtenir ce résultat qu'on a laissé au bouchon A une certaine mobilité ; et on est guidé dans le réglage par l'aspect des figures acoustiques. La poussière est chassée vers les nœuds *n n n*,... et les lignes nodales, d'abord confuses, se dessinent de plus en plus nettement à mesure que l'ajustement devient plus parfait : quand la colonne d'air se trouve un multiple exact de la demi-longueur d'onde, la poussière quitte complètement les ventres et se rassemble en petits tas isolés marquant nettement les nœuds N,N,N,... Il n'y a plus dès lors qu'à mesurer la distance l de deux lignes nodales pour avoir la demi-longueur d'onde dans l'air $\frac{\lambda}{2}$ du son, dont la demi-longueur d'onde dans le solide $\frac{\Lambda}{2}$ est égale à la longueur L de la verge ; et la proportion

$$\frac{l}{L}=\frac{v}{V}$$

donne le rapport des vitesses du son dans l'air et dans le solide.

Voici, par exemple, les nombres obtenus pour la longueur d'une concamération (déduite de la mesure de la longueur totale de 8 à 10 concamérations), dans une expérience avec une verge de laiton de $0^m,9415$ de longueur, rendant le son 2.

	$43^{mm},25$
	43 , 25
	43 , 50
	43 , 28
	43 , 41
	43 , 33
	43 , 44
	43 , 13
	43 , 13
moyenne :	43 , 30

L'erreur moyenne ne dépasse pas $0^{mm},10$.

M. Kundt trouve ainsi, conformément à la théorie de M. von Helmholtz, que :

1° La vitesse du son dans un tube diminue avec le diamètre, dès que celui-ci est inférieur au quart de la longueur d'onde du son considéré;

2° La diminution est plus grande pour les sons graves que pour les sons aigus.

A l'appui de ces conclusions nous reproduirons le tableau suivant, dans lequel on a représenté pour chaque son la vitesse dans le tuyau le plus large par le nombre de Moll et van Beck.

Diamètre du tuyau	Vitesse du son		
	$\lambda = 180^{mm}$	$\lambda = 90^{mm}$	$\lambda = 60^{mm}$
55^{mm}	$332^m,80$	$332^m,80$	$332^m,80$
26	332 ,73	332 ,66	333 ,45
13	329 ,47	329 ,88	330 ,87
6,5	323 ,00	327 ,14	328 ,14
3,5	305 ,42	318 ,88	»

M. Kundt a vérifié en outre que la vitesse était indépendante de la pression, entre 400^{mm} et 1760^{mm}.

Il a confirmé encore la loi d'après laquelle la vitesse varie proportionnellement à $\sqrt{1+\alpha t}$. En opérant sur de l'air à 100°, il a trouvé

$389^m,21$ $388^m,84$ $389^m,15$ $388^m,47$ $389^m,02$ $389^m,64$ $388^m,60$

moyenne : $388^m,99$; et le nombre théorique, calculé avec $\alpha = 0,003665$, est $389^m,03$ [1].

Enfin, il a cru pouvoir déduire de ses expériences que la vitesse est indépendante de l'intensité du son. Mais la méthode n'est pas assez précise pour trancher la question : on ne peut répondre du chiffre des décimètres.

La méthode de M. Kundt convient au contraire très bien pour comparer les vitesses de propagation du son dans les différents gaz : on dispose alors sur l'autre bout D de la verge CD un deuxième tube,

[1] La longueur d'onde d'un son donné dans l'air variant avec la température comme $\sqrt{1+\alpha t}$, tout appareil permettant de mesurer cette longueur d'onde peut servir de *pyromètre acoustique* (Mayer, *Dana's and Sillimann's American Journal* (3), IV, 425; 1872; et *Journal de physique*, II, 227; Chautard, *Journal de physique*, III, 78; 1874). Il faut remarquer toutefois que la sensibilité d'un tel pyromètre décroît avec la température : pour une élévation de température de 1° la variation de la longueur d'onde de $ut_4 = 512^v$, variation qui est de plus de 1^{mm} à la température ordinaire, tombe à $^1/_2{}^{mm}$ vers 1000°.

semblable au tube à air AB, et on le remplit du gaz à étudier; les distances respectives des tas de poussière dans les deux tubes sont exactement proportionnelles aux vitesses, les conditions étant identiques des deux côtés.

M. Wüllner [1] a déterminé par ce procédé non seulement les vitesses relatives du son dans les divers gaz, mais encore les vitesses absolues d'après le nombre des vibrations de la verge excitatrice, en tenant compte de l'influence du diamètre du tube au moyen de la formule de M. Kirchhoff; il a trouvé ainsi :

	Vitesse relative	Vitesse absolue
Air	1	331,90 m
Oxyde de carbone	1,016	337,13
Acide carbonique	0,781	259,38
Protoxyde d'azote	0,782	259,64
Ammoniaque	1,253	415,99
Éthylène	0,952	315,90

Pour la démonstration on peut disposer les appareils très simplement, en utilisant comme verges vibrantes les tubes mêmes qui renferment les gaz. Dans cette disposition, qui fut la première adoptée par l'auteur, chaque tube rempli du gaz à étudier et contenant un peu de poussière est fermé à ses deux bouts. Il suffit de le saisir d'une main en son milieu et de le frotter de l'autre avec un drap mouillé pour faire apparaître la division de la colonne d'air en concamérations. Toutefois les figures de poussière sont moins nettes qu'avec l'appareil à verge, les lignes nodales du tube lui-même tendant à se produire sous la forme d'une spirale, remarquée jadis par Savart; et le lycopode, se distribuant autrement, dessine un anneau autour de chaque nœud et des stries

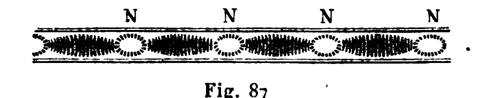


Fig. 87

transversales sur les ventres. La distance des centres de deux anneaux consécutifs mesure une concamération ou une demi-longueur d'onde. Un tube en verre de Bohême plein d'air présentera

(1) Wüllner, *Wied. Ann.*, IV, 321; 1878; et *Lehrbuch der Experimentalphysik*, I, 803.

16 segments, montrant ainsi immédiatement que la vitesse du son dans l'air est 1/16 de la vitesse dans le verre de Bohême. Avec quatre tubes identiques, respectivement pleins d'air, d'acide carbonique, de gaz d'éclairage et d'hydrogène, et excités de façon à donner l'octave, M. Kundt a obtenu 32, 40, 20 et 9 segments. Les vitesses relatives du son dans ces quatre gaz sont donc 1, 0,8, 1,6, 3,56.

368. Mesure de la vitesse du son dans les liquides au moyen des tuyaux sonores. — Les vibrations des colonnes liquides obéissant aux mêmes lois que les vibrations des colonnes gazeuses, on a cherché à mesurer la vitesse du son dans les liquides en les enfermant dans des tuyaux et en leur appliquant les mêmes procédés qu'aux gaz.

La figure 88 montre l'appareil employé à cet effet par Wertheim. Un tuyau *b*, dont on voit en bas le détail, était plongé dans une cuve A contenant le liquide à étudier et recevait d'une pompe B un courant du même liquide, courant régularisé par la sphère C remplie d'air à la pression convenable. Le tuyau *b*, muni d'une embouchure dont les deux lèvres *d* et *e* se plaçaient à la distance voulue au moyen des colliers *f*, *f*, était formé de plusieurs parties s'ajoutant l'une à la suite de l'autre, et il pouvait en outre recevoir un bouchon *k* sur le dernier pas de vis *h*. Wertheim se proposait de déterminer la perturbation à l'origine sur le tuyau fermé, et la somme des perturbations aux deux extrémités sur le tuyau ouvert. Mais il reconnut bientôt que, le fond prenant toujours fortement part aux vibrations du liquide, il ne pouvait pas opérer avec le tuyau fermé. Il se borna donc à expérimenter sur le tuyau ouvert; même dans ce cas le mouvement se communique encore aux parois, ce qui explique la faiblesse du nombre que trouva Wertheim pour la vitesse du son dans l'eau (1173^m à 11°) (1).

(1) Ce nombre multiplié par $\sqrt{\frac{3}{2}}$ se trouvant égal à 1437, c'est-à-dire à très peu près au résultat de Colladon et Sturm, Wertheim en conclut que pour les liquides, comme pour les solides, la vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal dans une colonne cylindrique n'est que les $\sqrt{\frac{2}{3}}$ de la vitesse dans une masse indéfinie. Cette assimilation des liquides aux solides est évidemment insoutenable.

M. von Helmholtz (¹) signala presque aussitôt la raison de cette faiblesse, en faisant remarquer que la perte de force vive devait

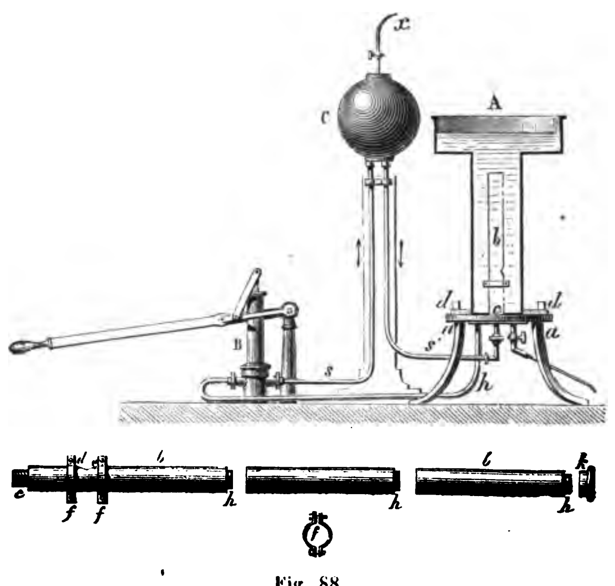


Fig. 88

dépendre du diamètre du tuyau, de l'épaisseur des parois et de leur élasticité. Récemment, MM. Kundt et Lehmann (²) ont vérifié cette interprétation en mesurant par la méthode des poussières, avec de la limaille de fer, la vitesse V de propagation du son à travers l'eau dans des tubes en verre de différentes épaisseurs *e* et de différents diamètres intérieurs 2R; ils ont trouvé en effet les nombres suivants à une température voisine de 18° :

e	2R	V
mm	mm	mm
2,2	28,7	1040
3,0	34,0	1228
3,0	23,5	1262
2,5	21,0	1358
5,0	16,5	1360
5,0	14,0	1383

(¹) Helmholtz, *Fortschritte der Physick im Jahre* 1848. Cf. André, *C. R.*, LXX, 568; 1870.
(²) Kundt et Lehmann, *Pogg. Ann.*, CLIII, 1; 1874.

M. Dvorák (¹), par la même méthode employée d'une manière un peu différente, avec de la poudre à canon débarrassée du salpêtre par lixiviation, a obtenu des résultats tout semblables :

e	2R	V
mm	mm	mm
0,82	17,9	998
0,63	11,7	1046
0,52	8,46	1164
2	15	1213
2	11	1281

L'erreur diminue quand l'épaisseur augmente et quand le diamètre décroît, quand par conséquent la résistance des parois devient plus grande; mais elle ne s'atténue pas assez pour qu'on puisse mesurer par cette méthode la vitesse du son dans les liquides.

La méthode convient au contraire très bien aux solides, ainsi que nous le verrons plus loin.

(¹) Dvorák, *Pogg. Ann.*, CLIV, 156; 1875.

CHAPITRE VI

CORDES VIBRANTES

369. Lois des cordes vibrantes. — *Historique.* — Les Grecs attribuent l'invention de la lyre à Apollon, les Hébreux à Jubal, les Égyptiens à leur Mercure Trismégiste, les Chinois à Confucius. Sans nous arrêter à ces légendes, nous sommes du moins certains qu'au temps de Ramsès III (1250 ans avant J.-C.), les Égyptiens possédaient un grand nombre d'instruments à cordes construits avec un art parfait, depuis les grandes harpes jusqu'au modeste luth. Les principales circonstances qui règlent les vibrations transversales des cordes furent donc très anciennement connues. Pythagore montrait sur un monocorde que, pour rendre l'octave ou la quinte, une corde doit être réduite à la moitié ou aux deux tiers de sa longueur première. Il chercha aussi l'influence de la tension, mais il ne paraît pas en avoir trouvé l'expression exacte.

Lois. — Au commencement du dix-septième siècle, Mersenne[1] établit expérimentalement les lois du phénomène (327); cent ans plus tard Taylor [2] en donna la théorie et obtint la formule suivante, qui contient toutes les lois découvertes par Mersenne,

$$N = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gT}{PL}},$$

[1] MERSENNE, *loc. cit.*, liv. II, prop. 18.

[2] TAYLOR, *Phil. Trans.*, 1713; et plus en détail dans son célèbre ouvrage, *Methodus incrementorum*. London; 1715.

g désignant l'accélération due à la pesanteur,
T — la tension totale [1],
P — le poids total,
et L — la longueur de la corde.

Si la corde est un cylindre de rayon R et de poids spécifique p, on a $P = \pi R^2 L p$, et la formule peut s'écrire

$$N = \frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{gT}{\pi p}}.$$

La hauteur du son fondamental (définie, comme d'habitude, par le nombre des vibrations de ce son) est :

1° En raison inverse de la longueur ;

2° En raison inverse du diamètre ;

3° En raison inverse de la racine carrée de la densité de la corde ;

4° En raison directe de la racine carrée du poids tenseur.

Vérifications expérimentales. — Toutes ces propositions se vérifient aisément avec le sonomètre différentiel de Marloye (fig. 19), sur lequel sont tendues deux cordes dont l'une sert de terme de comparaison, tandis que l'autre est soumise aux diverses conditions de l'expérience. Toutefois, pour estimer exactement la tension, il est préférable d'employer, à l'exemple de Savart, un sonomètre vertical, dans lequel les cordes sont tendues directement par des poids attachés à leur extrémité inférieure : deux étaux fixés à la planchette permettent de limiter les portions vibrantes.

La vérification est d'autant plus précise que la corde satisfait mieux à sa définition théorique (372) : *un fil parfaitement flexible et dépourvu d'élasticité propre.* Les cordes à boyau sont généralement préférables aux cordes métalliques.

Sons supérieurs. — Outre le son fondamental, il existe des sons supérieurs, que Mersenne [2] remarqua en écoutant attentivement la note émise ; à mesure qu'elle s'éteint, les sons supérieurs deviennent de plus en plus distincts : on peut entendre ainsi l'octave (qui échappa à Mersenne à cause de sa ressemblance avec la tonique),

(1) La tension totale est mesurée par le poids qui, attaché à l'extrémité de la corde, produirait effectivement cette tension.

(2) MERSENNE, *loc. cit.*

la douzième, la double octave (qui lui fit aussi défaut) et la dix-septième.

Expérience de Noble et Pigott. — En 1673, deux élèves de Wallis à Oxford, Noble et Pigott ([1]), établirent l'existence de ces sons supérieurs par une expérience curieuse. Les musiciens avaient depuis longtemps observé que si une corde est attaquée sur un instrument quelconque, une corde voisine, accordée à l'unisson, entre elle-même en vibration. Qu'arrivera-t-il si la deuxième corde est à l'octave grave, à la douzième basse, à la double octave grave,... de la corde directement attaquée ? Les élèves de Wallis prouvèrent que, dans tous les cas, cette deuxième corde se met à vibrer à l'unisson de la première : elle se partage en 2, 3, 4... segments, rendant chacun le son donné et séparés par des nœuds immobiles. Noble et Pigott montraient ces nœuds en y posant de petits cavaliers de papier qui restaient immobiles, tandis que partout ailleurs ils étaient désarçonnés.

Expérience de Sauveur. — De son côté, Sauveur ([2]), en France,

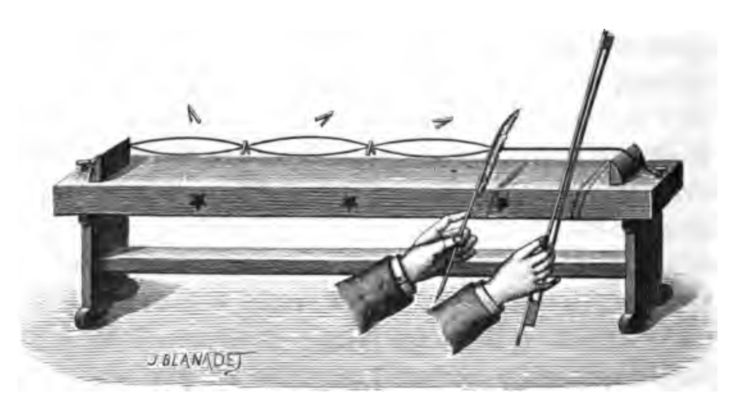


Fig. 89

faisait la même expérience sous une forme un peu différente, l'un des segments de la corde étant directement excité à l'archet ; et il y ajoutait cette observation instructive. Une corde émettant le son fondamental et vibrant par conséquent sur toute sa longueur, il la

([1]) Noble et Pigott, cités par Wallis, *Phil. Trans.* ; 1677 ; et *Algebra* II, 466. London ; 1685.

([2]) Sauveur, *Mémoires de l'Acad. des Sciences* ; 1701.

touchait avec une barbe de plume à la moitié, au tiers, au quart,... : on entendait alors l'octave, la douzième, la double octave,... ([1]); et en même temps on constatait la subdivision de la corde au moyen de cavaliers blancs et noirs placés respectivement aux nœuds et aux ventres (ces deux appellations sont de Sauveur).

Expérience d'Young. — Young ([2]) montra que si la corde est pincée, frappée ou, pouvons-nous ajouter, attaquée à l'archet ([3]) en son milieu, les sons pairs ne se forment pas : car il suffit de toucher ensuite la corde en ce même milieu avec une barbe de plume, pour éteindre complètement le son. De même, quand la corde est attaquée au tiers, les sons 3, 6, 9,... font défaut. En général, dans le cortège des sons supérieurs manquent tous ceux qui auraient un nœud au point d'attaque.

Analogie des lois des cordes avec celles des tuyaux sonores. — Les principales circonstances du mouvement transversal ([4]) des cordes offrent avec les lois des vibrations longitudinales des tuyaux ou des verges une analogie frappante. C'est qu'en effet, dans les deux cas, un même mode de combinaison de mouvement entraîne une même relation entre la vitesse de propagation du son et le nombre des vibrations.

370. Relation entre la vitesse de propagation du son et le nombre des vibrations. — Reprenons le long tube de caoutchouc fortement tendu, fixé à un bout et saisi à l'autre, dont nous nous sommes déjà servis (343) : par une brusque secousse produisons un ébranlement transversal à l'origine, et nous consta-

([1]) Les violonistes mettent à profit ce fait pour obtenir des sons très élevés et très purs : ils touchent légèrement avec le doigt la corde vibrante au point convenable.

([2]) Young, *Phil. Trans.*; 1880; et *Miscellaneous Works* (éd. Peacock. London; 1855), I, 64.

([3]) Delezenne, ayant observé qu'une corde attaquée à l'archet juste en son milieu restait muette, pensait que la présence de l'octave était nécessaire à la production du son fondamental. Mais, bien que la largeur de l'archet rende l'expérience difficile, on peut, en le passant au milieu de la corde, tirer de celle-ci un grand nombre de sons impairs. (Delezenne, *Recueil des travaux de la Société des sciences de Lille*; 1827; Duhamel, C. R., X, 855; 1840; Antoine, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVII, 191; 1849.)

([4]) Les cordes vibrantes sont aussi susceptibles de vibrer longitudinalement. Nous étudierons ces vibrations longitudinales en même temps que celles des verges dont elles ne diffèrent pas.

terons aisément que cet ébranlement, propagé jusqu'à l'extrémité fixe, s'y réfléchit avec changement de signe de la vitesse (la protubérance se transformant en dépression), pour revenir éprouver contre la main un nouveau changement de signe ([1]). Par suite, un mouvement périodique entretenu à l'origine se trouve rapidement amplifié, l'onde deux fois réfléchie étant identique à l'onde directe si la durée du double voyage de l'onde est un nombre entier k de périodes. Ainsi, V étant la vitesse de propagation du mouvement transversal dans la corde de longueur L soumise à l'expérience, la condition du renforcement sera

$$\frac{2L}{V} = k\tau,$$

ou

$$N = k\frac{V}{2L},$$

ce qui est la formule même établie pour les tuyaux sonores (359).

Un changement de période amène aisément la division du tube en un nombre quelconque de parties vibrant à l'unisson. Mais il est possible de donner à l'expérience une forme plus précise, due à M. Melde, de Marbourg.

371. Expériences de Melde ([2]). — Un long cordonnet de soie blanche est tendu horizontalement entre une cheville ou une poulie fixe et un diapason vertical. Le plan des branches du diapason contenant le cordonnet, l'extrémité de celui-ci se déplacera longitudinalement quand le diapason vibrera. Le cordonnet, successivement relâché puis retendu, s'abaissera, redeviendra horizontal, s'élèvera, retournera à la position horizontale et ainsi de suite, le mouvement longitudinal du point d'attache provoquant un mouvement transversal du système avec une période double; la corde entière oscillera donc à l'octave grave du diapason ([3]). Mais pour que la corde puisse

([1]) Les frères Weber ont suivi avec beaucoup de soin la propagation d'un ébranlement dans une grande ficelle de coton, très flexible et très peu élastique : ils ont trouvé que la vitesse de la propagation était indépendante de la nature de l'ébranlement (chiquenaude, choc d'un marteau), indépendante aussi du chemin déjà parcouru (E. H. et W. Weber, *loc. cit.*, 460.).

([2]) Melde, *Pogg. Ann.*, CIX, 193 et CXI, 513 ; 1860-64.

([3]) Si les vibrations du diapason s'effectuaient perpendiculairement à la di-

vibrer ainsi, une tension convenable est nécessaire : au début il



Fig. 90

ne se produira en général qu'un frémissement irrégulier ; en modi-

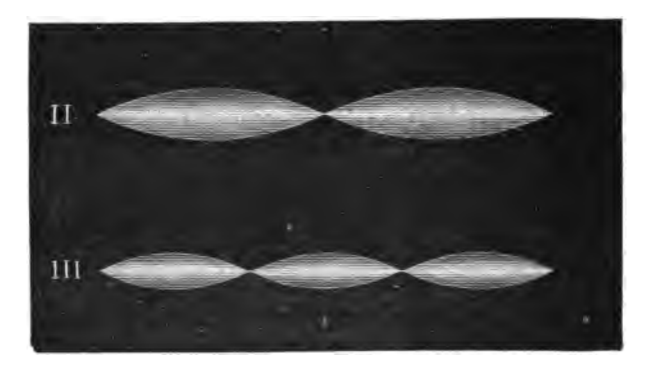


Fig. 91

fiant graduellement la tension, nous arriverons à la valeur vou-

rection de la corde, l'accord s'établirait à l'unisson. Par conséquent, la corde

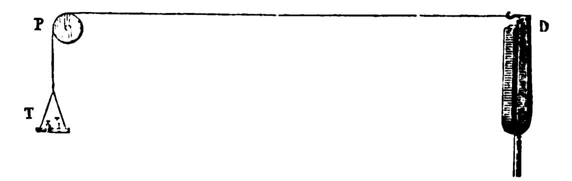


Fig. 92

étant d'abord à l'octave grave du diapason (fig. 90), si l'on fait tourner celui-ci de 90° sur lui-même, on verra se former deux fuseaux égaux séparés par un nœud.

lue, et la corde s'épanouira en un fuseau d'un blanc perlé admirable et d'une fixité parfaite. Diminuons la tension de la corde, tout se déforme et se brouille pour rentrer dans l'ordre quand la tension sera devenue égale exactement au quart de ce qu'elle était d'abord : la corde se partagera alors en deux segments oscillants, séparés par un nœud absolument immobile. Une tension égale au neuvième de la valeur originelle amènera la division en trois segments; et ainsi de suite, chaque forme se présentant avec une netteté saisissante [1].

Comme, d'ailleurs, dans tous les cas, chacun des segments vibre à l'unisson de l'octave grave du diapason, il en résulte que si pour la tension 1/9, par exemple, la corde se divise en trois segments, c'est que pour cette tension 1/9 le son fondamental est 1/3, ou la douzième basse du son de la corde tendue par le poids 1. La loi des tensions est donc vérifiée.

L'influence de la longueur se mettra facilement en évidence avec deux diapasons de hauteur différente : pour s'étaler semblablement, les longueurs d'une même corde également tendue, excitée successivement par ces deux diapasons, devront être en raison inverse des nombres de vibrations des deux diapasons.

Si l'on veut reconnaître l'influence du poids de la corde, on prendra d'une part un cordonnet de longueur L qui sous la tension T donne avec le diapason *a* un fuseau unique, et d'autre part quatre cordonnets identiques, disposés parallèlement en une seule corde de même longueur L, à laquelle on appliquera la même tension T et que l'on attachera à un diapason A (octave grave du précédent); cette corde s'étalera de même en un seul fuseau ; donc, le poids de la corde ayant quadruplé, le son fondamental est descendu à l'octave grave. On peut aussi, comme l'indique M. Tyndall, prendre une corde formée sur le tiers de sa longueur de quatre brins parallèles et pour les deux tiers restants d'un seul brin du même cordonnet; amenée à se partager en deux fuseaux, cette corde présentera un nœud précisément au point d'attache de ses

[1] En substituant au cordonnet de soie un fil de platine chauffé au rouge par un courant électrique, M. Tyndall rend l'expérience visible à un nombreux auditoire : les ventres, refroidis par leur passage rapide à travers l'air, sont obscurs, tandis que les nœuds brillent avec éclat, l'incandescence diminuant rapidement de part et d'autre de chaque nœud.

deux portions d'inégal diamètre, le segment de longueur simple et de diamètre double battant synchroniquement avec le segment de longueur double et de diamètre simple.

Enfin, avec des fils de substances différentes, également longs et également gros, attachés à un même diapason, on vérifiera aisément que les poids tenseurs nécessaires pour les faire vibrer à l'unisson de l'octave grave du diapason sont proportionnels aux poids spécifiques des substances employées : ce qui donnerait à la rigueur un moyen de déterminer au diapason les poids spécifiques relatifs des métaux susceptibles d'être étirés en fils minces et flexibles.

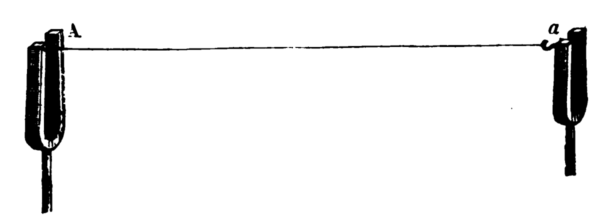


Fig. 93

En superposant sur une même corde les actions de deux diapasons à l'octave l'un de l'autre, on obtient une série de formes dont la

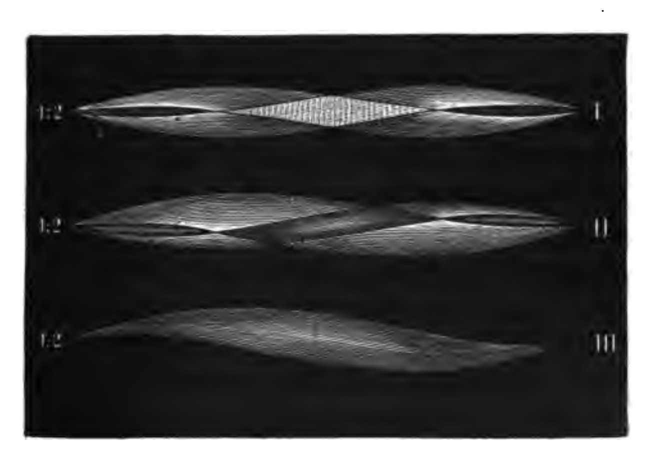


Fig. 94

figure ci-contre représente les principales, et dans lesquelles se distinguent les deux mouvements vibratoires.

La figure 95 montre l'un des aspects qui résultent de l'excitation simultanée par deux diapasons sonnant à la douzième.

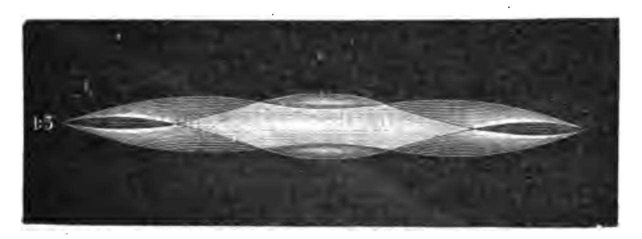


Fig. 95

Le procédé de Melde, étant particulièrement commode pour entretenir la vibration, permet d'étudier aisément les formes successives de la corde au moyen d'une lumière à éclipses intermittentes. A cet effet, M. Neumann dirige sur une corde filée (recouverte de fil métallique) la lumière vive sortant d'une fente parallèle. Devant cette fente il dispose une lame de verre portant un trait noir à l'encre de Chine et fixée à un diapason de telle sorte qu'au repos le trait noir occulte la lumière. Mais quand le diapason vibre, la lumière éclaire en général la corde qui offrira encore l'apparence d'un fuseau brillant sur lequel on verra se mouvoir lentement une ligne sombre affectant les formes successives de la corde, si celle-ci est à peu près à l'octave du diapason. La ligne serait immobile si l'accord était exact.

372. Théorie des cordes vibrantes. — *Équation des cordes vibrantes.* — La théorie des cordes vibrantes, commencée par Taylor, a fait l'objet des recherches de Jean et de Daniel Bernoulli, de d'Alembert, d'Euler, de Lagrange, et a su intéresser encore de nos jours plus d'un mathématicien.

Pour établir cette théorie, on suppose la corde parfaitement flexible et dénuée d'élasticité, ce qui pratiquement revient à admettre :

1° Que les dimensions transversales de la corde sont assez petites pour que celle-ci puisse être regardée comme un simple fil absolument flexible ;

2° Que la corde est suffisamment tendue et n'éprouve que des déformations assez faibles pour que les forces élastiques variables résultant de ces déformations soient complètement négligeables relativement à la tension permanente T.

En se bornant à de telles déformations, on pourra considérer l'angle qu'un élément quelconque de la corde fait à tout instant avec sa position initiale comme infiniment petit et en négliger les puissances supérieures à la première.

Soit donc, à un instant quelconque du mouvement, $a'b'$ un élément ds qui était en ab à l'état d'équilibre. Aux deux extrémités de cet élément agissent deux forces égales à T, mais non directement opposées et qui par conséquent ne se font pas équilibre : soient α

T a' b' T
a b

Fig. 96

l'angle que la tangente en a' fait avec la position première AB de la corde prise pour axe des x, et β l'angle que fait avec le même axe la tangente en b', l'élément $a'b'$ est sollicité dans une direction oy perpendiculaire à ox par une force

$$F = T(\sin\beta - \sin\alpha) = T\, d\sin\alpha,$$

ou, si, d'après notre hypothèse sur la petitesse de α, nous identifions le sinus avec la tangente,

$$F = T\, d\,tg\,\alpha = T\frac{d^2y}{dx^2}\,dx.$$

L'équation du mouvement dans le sens des y est donc, μ désignant la masse de la corde par unité de longueur,

$$\mu ds\frac{d^2y}{dt^2} = T dx\frac{d^2y}{dx^2},$$

ou, comme ds ne diffère pas de dx au degré d'approximation où nous nous sommes placés,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\mu}\frac{d^2y}{dx^2},$$

ou enfin, si l'on pose $\frac{T}{\mu} = V^2$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = V^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

C'est la fameuse équation des cordes vibrantes que nous avons déjà vue présider à la propagation d'un ébranlement longitudinal dans un cylindre élastique (344).

A. — Intégration par des fonctions arbitraires. — On se rappelle que l'intégrale générale de cette équation peut se représenter par la somme de deux fonctions arbitraires,

$$y = f(x + Vt) + F(x - Vt),$$

indiquant la superposition de deux déformations qui se propagent en sens contraire avec la même vitesse V.

Cette solution s'applique immédiatement au cas d'une corde indéfinie, et on peut l'étendre au problème d'une corde finie par l'artifice qui nous a déjà servi pour un tuyau limité.

Si nous supposons d'abord la corde terminée d'une part à l'origine et s'étendant indéfiniment dans le sens des x positifs, nous pourrons la regarder comme faisant partie d'une corde indéfinie dans les deux sens, pourvu que les déplacements et les vitesses initiales dans la partie négative soient réglés de manière que, la corde étant abandonnée à elle-même, l'origine reste perpétuellement au repos : en d'autres termes, l'onde positive du côté négatif doit être telle qu'en se superposant à l'onde négative donnée du côté positif elle laisse l'origine en repos ; ou encore, l'onde positive émanant de l'origine doit être précisément celle que produit la réflexion de l'onde réelle à l'extrémité fixe.

De là, on passe aisément au cas de la corde attachée aux deux bouts : la perturbation initiale se partage d'elle-même en ondes positives et en ondes négatives qui sont réfléchies aux extrémités, changent de signe à chaque réflexion, pour reprendre leur état primitif après un nombre pair quelconque de réflexions, de sorte que la période du mouvement est le temps requis pour parcourir deux fois la longueur de la corde, $\tau = \frac{2L}{V}$, ou un sous-multiple de ce temps.

Corde fixée à ses deux bouts. — Le cas d'une corde attachée aux deux bouts étant celui qui intéresse réellement la pratique, nous exposerons avec quelque détail la méthode par laquelle on le ramène au cas général en supposant la corde prolongée indéfini-

ment dans les deux sens et en disposant des conditions initiales de façon à assurer l'immobilité constante des extrémités de la portion considérée.

a) Déplacements initiaux sans vitesses.

Examinons d'abord le cas où la corde, dérangée de sa position d'équilibre, est ensuite abandonnée librement à elle-même, sans vitesse initiale ; et, comme les deux ondes se partageront également le déplacement, soit $y = 2f(x)$, x étant compris entre o et L, l'équation de la courbe que dessine la corde déformée. Construisons la courbe $y = f(x)$, pour les valeurs de x comprises entre o et L. Soit *acb* cette courbe ; traçons la courbe *bc'b'* symétrique de *acb* par rapport au point *b*, puis la symétrique de celle-ci par rapport à *b'*, et ainsi de suite indéfiniment ; opérons de même à gauche. Le mouvement de la corde donnée sera celui de la portion *ab* d'une corde indéfinie dont l'état initial serait figuré par tous les arcs de courbe que nous venons de tracer et dans laquelle la déformation se propagerait dans les deux sens avec la vitesse V, c'est-à-dire qu'il sera représenté à un instant quelconque par l'équation

$$y = f(x + Vt) + f(x - Vt).$$

En effet, on a

à l'époque $t = o$, pour toute la corde, $y = 2f(x)$, $\frac{dy}{dt} = o$,
et à toute époque, aux points $x = o$ et $x = L$, $y = o$.

Le mouvement d'un point quelconque est périodique, car

$$f(x \pm 2L) = f(x),$$

et par conséquent

$$f\left(x \pm V\left(t \pm \frac{2L}{V}\right)\right) = f\left(x \pm Vt\right),$$

c'est-à-dire qu'après un temps $\tau = \frac{2L}{V}$ la courbe reprend la même forme.

Soit par exemple une corde pincée, ou mieux écartée de sa posi-

tion d'équilibre avec une pointe fine (telle que le plectrum du joueur de lyre), et ayant reçu à l'époque $t=0$ la forme ACB

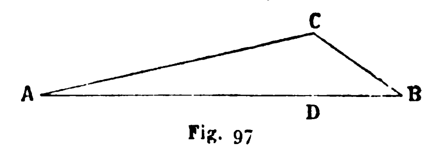


Fig. 97

constituée par deux portions rectilignes. Réduisant les ordonnées à

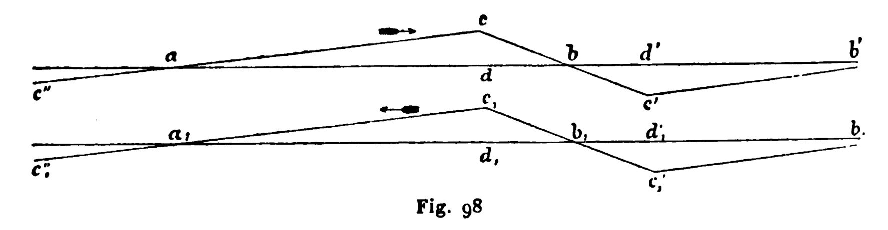


Fig. 98

moitié, effectuons le tracé marqué par la figure 98, où la courbe supérieure représente les ondes positives et la courbe inférieure les

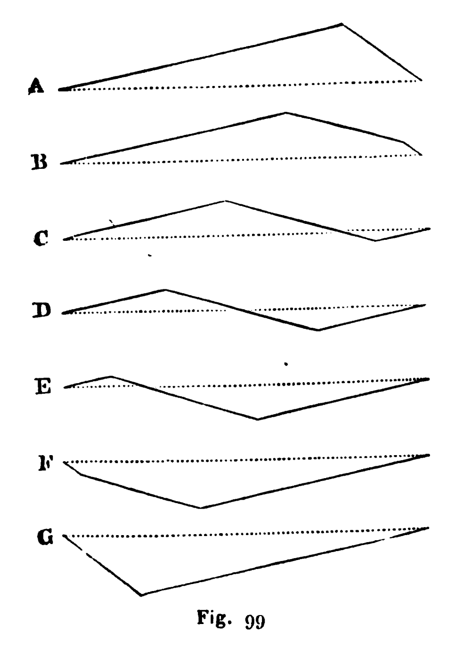


Fig. 99

ondes négatives dans leur position initiale. Il suffit de combiner les deux courbes déplacées en sens inverse chacune de Vt pour avoir

la forme de la courbe à l'époque t. On obtient ainsi les figures ci-contre, qui correspondent à des époques distantes d'un douzième de période. Au bout d'une demi-période la corde a pris la forme G, d'où elle revient à la forme primitive en passant par les mêmes figures, composées exclusivement de portions rectilignes.

b) Vitesses initiales sans déplacements.

Si la corde dans sa position d'équilibre reçoit en chacun de ses points une vitesse initiale $2\varphi'(x)$ (nécessairement nulle aux extrémités), on verra de même que l'équation

$$y'=\varphi'(x+Vt)+\varphi'(x-Vt)$$

donnera les vitesses, et

$$y=\frac{1}{V}\left[\varphi(x+Vt)-\varphi(x-Vt)\right]$$

les déplacements à un instant quelconque, les deux fonctions y' et y étant encore périodiques et de même période $\tau=\frac{2L}{V}$.

c) Vitesses et déplacements initiaux.

Si enfin les deux conditions, déplacements et vitesses, se superposent primitivement aux divers points de la corde, on pourra toujours, en ajoutant les deux solutions précédentes, déterminer à un instant quelconque l'état de la corde en chacun de ses points.

La question doit donc être regardée comme complètement résolue.

Formule de Taylor. — Dans tous les cas, le son fondamental aura pour période $\tau=\frac{2L}{V}$, ou pour hauteur

$$N=\frac{V}{2L}.$$

Or nous avons posé $V^2=\frac{T}{\mu}$, T étant le poids tenseur, et μ étant

la masse par unité de longueur, ou $\frac{P}{gL}$, si nous appelons P le poids de la corde entière; on a donc

$$N=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gT}{PL}},$$

ce qui est bien la formule de Taylor.

A l'aide des équations aux dimensions (72) des diverses quantités entrant dans cette formule

$$T=[MLt^{-2}], \quad g=[Lt^{-2}], \quad P=[MLt^{-2}], \quad L=[L],$$

nous vérifierons aisément que $N=[t^{-1}]$, et que par conséquent la formule est homogène ([1]). Si nous tenions pour évident *a priori* que la période ne dépend que de L, T et μ, l'équation aux dimensions de μ étant $\mu=[ML^{-1}]$, comme la seule combinaison de ces quantités capable de représenter un temps est $T^{-\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}L$, la condition d'homogénéité nous donnerait la formule de Taylor, le facteur numérique restant seul indéterminé.

B. — Intégration par des séries trigonométriques. — Si la méthode de Lagrange résout complètement le problème de mécanique, il reste à savoir au point de vue physique quelle sera la nature du son produit par le mouvement de la corde. La réponse à cette question se trouve dans une deuxième manière de satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2}=V^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

différentielle dont l'intégrale générale peut être mise sous la forme d'une série trigonométrique, ainsi que l'a montré D. Bernoulli ([2]).

Suivant l'exemple de Taylor, nous chercherons d'abord une solution particulière. Et, à cet effet, prenant pour guide l'obser-

([1]) Plus simplement, on peut remarquer que, T et P étant des forces, par conséquent le rapport $\frac{P}{T}$ un nombre abstrait, et $\frac{L}{g}$ étant le carré d'un temps (la moitié du carré du temps que met un corps pesant à tomber de la hauteur L), la formule représente bien l'inverse d'un temps.

([2]) D. Bernoulli, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1753.

vation, nous nous demanderons s'il est possible de résoudre le problème par un mouvement pendulaire

$$y = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right)$$

d'amplitude a variable avec le point x considéré.

Pour que cette valeur de y convienne, il faut que l'on ait

$$-\frac{a}{V^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{d^2a}{dx^2},$$

ou, puisque $V\tau = \lambda$,

$$\frac{d^2a}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 a;$$

d'où, en intégrant,

$$a = A \sin 2\pi\frac{x}{\lambda} + B \cos 2\pi\frac{x}{\lambda}.$$

Le mouvement proposé sera donc possible, si l'amplitude en chaque point obéit à cette équation. Mais, les deux extrémités de la corde étant fixes, y et par suite a doit être nul pour $x = 0$ et $x = L$, ce qui exige que $B = 0$ et que $\sin 2\pi\frac{L}{\lambda} = 0$, ou $\lambda = \frac{2L}{k}$, ou $\tau = \frac{1}{k}\frac{2L}{V}$, k étant un nombre entier quelconque. Ainsi la corde peut exécuter tout mouvement pendulaire dont la période est égale à un sous-multiple de $\frac{2L}{V}$ (ou à cette quantité même), et elle ne peut pas en exécuter d'autres, le mouvement d'indice k étant exprimé par

$$y = A_k \sin\frac{k\pi x}{L} \cos\left(\frac{k\pi V t}{L} - \varepsilon_k\right),$$

si l'on pose

$$2\pi\varphi_k = \varepsilon_k.$$

Le son fondamental correspond à $k = 1$, et par conséquent il a pour hauteur, comme nous l'avons déjà trouvé autrement,

$$N = \frac{V}{2L}.$$

A une valeur quelconque de k correspond un harmonique naturel du son fondamental.

Pour cet harmonique, y est nul à toute époque aux points

$$0, \quad \frac{L}{k}, \quad \frac{2L}{k}, \quad \frac{3L}{k}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{(k-1)L}{k}, \quad L;$$

tous ces points sont des nœuds. D'ailleurs la forme de la courbe à un instant quelconque est une sinussoïde.

Mais, d'après le principe de la superposition des petits mouvements, la corde peut exécuter à la fois tous ces mouvements pendulaires.

Analytiquement, l'équation des cordes vibrantes étant linéaire, la somme d'un nombre quelconque de solutions particulières est encore une solution. Si donc on fait la somme d'un nombre infini de solutions telles que

$$y = A_k \sin\frac{k\pi x}{L} \cos\left(\frac{k\pi Vt}{L} - \varepsilon_k\right),$$

on aura la solution générale

$$y = \sum_0^\infty A_k \sin\frac{k\pi x}{L} \cos\left(\frac{k\pi Vt}{L} - \varepsilon_k\right),$$

le signe $\sum_0^\infty$ indiquant la sommation de tous les termes en nombre infini que l'on obtient en donnant à k successivement toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à l'infini dans l'expression placée sous le signe $\sum$.

Physiquement, cela signifie que tout mouvement vibratoire d'une corde peut être considéré comme la superposition de mouvements pendulaires de périodes sous-multiples de $\frac{2L}{V}$, et d'amplitudes et de phases convenables [1] (déterminées par les conditions initiales) [2].

[1] Dans chaque mouvement l'amplitude est variable avec l'abscisse du point de la corde considéré, la phase est la même en tous points.

[2] La proposition est vraie pour un système vibrant quelconque, ainsi que nous le verrons plus loin (théorème de Fourier).

a) Déplacements initiaux sans vitesses.

Si nous supposons d'abord qu'au début on déplace la corde sans lui imprimer de vitesse initiale, on doit avoir $\frac{dy}{dt} = 0$ pour $t = 0$, ce qui exige que tous les ε_k soient nuls. L'expression générale se réduit alors à

$$y = \sum_0^\infty A_k \sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi Vt}{L}.$$

La condition qu'au temps $t = 0$ la corde affecte la forme

$$y = f(x)$$

se traduit donc par la relation

$$f(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{L} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \;.\;.\;.\;.\;.\; + A_k \sin\frac{k\pi x}{L} + \;.\;.\;.\;.\;.$$

Pour déterminer l'un des coefficients, A_k, il suffit de multiplier les deux membres de cette équation par $\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$, et d'intégrer suivant toute la longueur de la corde. Tous les termes du deuxième membre de l'intégrale sont nuls, excepté celui qui a pour coefficient A_k et qui devient $\frac{L}{2}$ (¹). On en conclut

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx.$$

(¹) On a en effet pour un terme quelconque d'ordre k'

$$\int_0^L \sin\frac{k'\pi x}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L\left[\cos\frac{(k-k')\pi x}{L} - \cos\frac{(k+k')\pi x}{L}\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(k-k')\pi}\sin\frac{(k-k')\pi x}{L} - \frac{L}{(k+k')\pi}\sin\frac{(k+k')\pi x}{L}\right]_0^L,$$

quantité identiquement nulle si k' est différent de k; et pour le terme en A_k,

$$\int_0^L \sin^2\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L\left(1 - \cos\frac{2k\pi x}{L}\right)dx$$
$$= \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{k\pi}\sin\frac{2k\pi x}{L}\right)_0^L = \frac{L}{2}.$$

Cas d'une corde pincée. — Considérons, par exemple, le cas d'une corde pincée en son milieu de façon à former au début les deux côtés d'un triangle isocèle de hauteur h et de base L[1]. Multiplions les ordonnées du triangle par celles de la sinussoïde d'ordre k pour avoir celles de la courbe

$$y=f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

Si k est pair, la sinussoïde ayant un nombre pair de festons, l'aire de la courbe comprise entre o et $\frac{L}{2}$ est égale et de signe contraire à l'aire comprise entre o et $-\frac{L}{2}$, par conséquent l'aire totale est nulle ; tous les coefficients A_k d'ordre pair sont donc nuls.

Si k est impair, les deux aires s'ajoutent et l'aire totale est égale à leur somme, de sorte que l'on a

$$\text{pour } k \text{ impair,} \qquad A_k=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L},$$

ou, en remplaçant $f(x)$ par son expression analytique entre o et $\frac{L}{2}$, savoir $\frac{2h}{L}x$,

$$A_k=\frac{8h}{L^2}\int_0^{\frac{L}{2}} x\sin\frac{k\pi x}{L}dx,$$

et, en intégrant par parties,

$$=\frac{8h}{L^2}\left[-\frac{L}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{L}+\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi x}{L}\right]_0^{\frac{L}{2}},$$

ou

$$=\frac{8h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

[1] Voir MATHIEU, *Cours de Physique mathématique*, p. 19.

Le mouvement de la corde est donc représenté par la formule

$$y=\frac{8h}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi Vt}{L}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3\pi Vt}{L}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{L}\cos\frac{5\pi Vt}{L}\cdots\right].$$

Cette série est rapidement convergente. Le son fondamental prédominera donc, les harmoniques pairs manquant complètement suivant la loi de Young, et les harmoniques impairs s'affaiblissant rapidement.

On traiterait sans plus de peine le cas où la corde est pincée en un point l quelconque [1], et l'on trouverait, h désignant toujours la hauteur à laquelle ce point est soulevé,

$$A_k=\frac{2hL^2}{k^2\pi^2 l(L-l)}\sin\frac{k\pi l}{L}.$$

Le coefficient d'ordre k s'annule quand $\sin\frac{k\pi l}{L}=0$, ou quand l égale $\frac{L}{k}$, ou $\frac{2L}{k}$, ou $\frac{3L}{k}$,..., c'est-à-dire quand la corde est attaquée à l'un des nœuds du k^e son partiel.

b et *c*) Vitesses initiales sans ou avec déplacements.

Si les vitesses initiales ne sont pas nulles, on doit prendre pour chaque terme l'expression complète

$$y=A_k\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\left(\frac{k\pi Vt}{L}+\varepsilon_k\right),$$

ou l'expression équivalente

$$y=A_k\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi Vt}{L}+B_k\sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{k\pi Vt}{L};$$

[1] HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la musique*, p. 489.

et, $\varphi'(x)$ étant la vitesse de chaque point au temps $t=0$, on aura

$$\varphi'(x) = -\frac{\pi V}{L}\sum_0^\infty k B_k \sin\frac{k\pi x}{L},$$

d'où l'on tirera par le même procédé que tout à l'heure

$$B_k = -\frac{2}{k\pi V}\int_0^L \varphi'(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$

Cas d'une corde frappée. — Si une corde est frappée brusquement par un marteau dur et tranchant, et si le marteau se relève assez vite pour qu'au début le point touché (dont nous désignerons toujours l'abscisse par l) possède seul une certaine vitesse, sans avoir d'ailleurs éprouvé de déplacement sensible, les coefficients A seront tous nuls; et l'on aura

$$y = \frac{2c}{\pi V}\left[\sin\frac{\pi l}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi V t}{L} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi l}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{2\pi V t}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi l}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}\sin\frac{3\pi V t}{L} + \ldots\right.$$

c étant le produit de la vitesse initiale par la longueur extrêmement petite de la portion ébranlée, de sorte que l'expression générale de B_k devient ici

$$B_k = \frac{2c}{k\pi V}\sin\frac{k\pi l}{L}.$$

Le coefficient d'ordre k fait encore défaut quand le point d'attaque est à l'un des nœuds du son k. D'ailleurs les sons partiels ont relativement plus d'intensité que dans la corde pincée, le dénominateur de B_k contenant seulement k au lieu que celui de A_k contenait k^2. Dans le piano, où la mollesse et l'élasticité du marteau prolongent le choc, la force des harmoniques varie d'après une loi plus complexe, k^3 intervenant alors selon M. von Helmholtz.

Cas d'une corde excitée par l'archet. — Sur le violon, quand l'archet est bien conduit, les sons partiels valent le 1/4, le 1/9, le 1/16... du son fondamental : le rapport des intensités des harmoniques est donc le même que dans une corde pincée en son milieu, sauf que

celle-ci ne présente que les sons impairs. Quant au mouvement de la corde, « on peut le décrire brièvement, en disant que le pied *d* de l'abcisse du sommet va et vient sur la ligne *ab* avec une vitesse

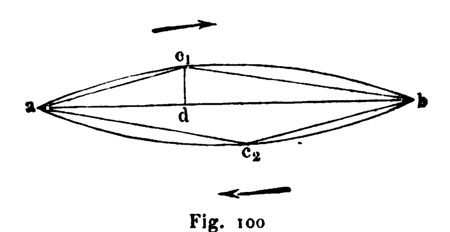


Fig. 100

constante, tandis que le sommet lui-même parcourt l'un après l'autre les deux arcs de parabole ac_1b et bc_2a, la corde étant tendue suivant les deux droites ac_1 et bc_1 (ou ac_2 et bc_2). »

Cas de l'expérience de Melde. — Dans le cas de l'expérience de Melde, la corde attachée d'une part à un point fixe, de l'autre à un diapason vibrant, doit remplir les conditions relatives aux extrémités :

$$\text{pour } x = 0, \quad y = 0,$$
$$\text{pour } x = L, \quad y = \alpha \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Si donc elle prend un mouvement pendulaire, synchrone à celui du diapason, $a = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} + B \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ étant toujours l'amplitude, on devra avoir

$$B = 0,$$
$$A \sin 2\pi \frac{L}{\lambda} = \alpha, \qquad \text{avec } \lambda = V\tau;$$

et l'équation du mouvement sera

$$y = \alpha \frac{\sin 2\pi \frac{x}{\lambda}}{\sin 2\pi \frac{L}{\lambda}} \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

On aura des nœuds aux points $\frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots$

Si L est un multiple exact de $\frac{\lambda}{2}$, en d'autres termes si l'une des périodes de la corde coïncide avec celle du diapason, le dénominateur devient nul. L'amplitude sera donc alors, non pas infinie, mais maximum et très grande : l'énergie dépensée pour mettre la corde en mouvement étant empruntée au diapason, l'amplitude cessera de s'accroître quand la perte (dissémination du mouvement dans l'air et dans les pièces solides tenant la corde, production de chaleur par les frottements) compensera l'apport, lequel d'ailleurs épuiserait bientôt le mouvement du diapason, si celui-ci n'était pas entretenu électriquement.

373. Effet de la raideur des cordes. — Les lois théoriques des cordes vibrantes se vérifient très exactement sur des cordes longues, flexibles et fortement tendues ; mais si les cordes sont courtes, grosses et peu tendues, le nombre des vibrations réellement effectuées est toujours supérieur au nombre théorique, et d'autant plus que la *raideur* de la corde est plus grande.

Cette raideur agit, en effet, à peu près comme une certaine tension constante T_0 s'ajoutant au poids tendant T, de sorte que le nombre réel des oscillations N est donné par la formule

$$N^2 = \frac{g}{2Lp}(T + T_0),$$

ou

$$N^2 = n^2 + n_0^2,$$

n étant le nombre théorique relatif à une corde parfaitement flexible tendue par le poids effectivement employé, et n_0 le nombre des oscillations qu'une corde semblable exécuterait sous l'action d'un poids produisant le même effet que la raideur de la corde réelle.

Cette formule a été établie empiriquement par N. Savart au moyen du sonomètre vertical (369). Duhamel l'a justifiée théoriquement. Toutefois l'assimilation de la raideur à une tension constante n'est pas tout à fait exacte, et la formule ne doit être regardée que comme approximative.

A. Seebeck préfère l'expression

$$N = n\left(1 + \frac{R^2}{L}\sqrt{\frac{\pi E}{Tg}}\right),$$

qui met en évidence l'influence du coefficient d'élasticité E de la matière de la corde.

La correction est d'autant plus forte que la corde est plus grosse, plus courte, plus élastique.

CHAPITRE VII

VERGES VIBRANTES

374. Distinction entre les verges et les cordes. — On appelle verges en acoustique des tiges rigides, par opposition aux cordes que l'on suppose parfaitement flexibles. La rigidité absolue ne se rencontre pas plus que la flexibilité parfaite ; toutefois ces deux cas extrêmes méritent une étude spéciale, à cause de leur intérêt théorique et de leur importance pratique.

Les verges peuvent être le siège de vibrations longitudinales ou transversales ou tournantes (Chladni a nommé ainsi celles qui ont lieu en vertu de la torsion de la barre autour de son axe).

I. — VIBRATIONS LONGITUDINALES.

375. Vibrations longitudinales des verges. — *Lois.* — Un ébranlement parallèle à l'axe se propageant dans une colonne élastique suivant un mécanisme indépendant de la substance qui constitue cette colonne, les verges en vibrations longitudinales obéissent aux mêmes lois que les tuyaux sonores, comme l'a montré Chladni (1).

La section est indifférente tant que les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur.

Une verge libre aux deux bouts (2) se comporte de la même manière qu'un tuyau ouvert aux deux extrémités.

Une verge fixée à un bout et libre à l'autre est l'analogue d'un tuyau bouché.

(1) Chladni, *Acta Academiæ Moguntiacæ, Erford.* 1796 ; et *Traité d'acoustique*, p. 101.
(2) Ou fixée aux deux bouts.

Expériences : Chladni, Savart, Biot. — Pour faire vibrer une verge longitudinalement, on la frotte dans le sens de la longueur avec les doigts, ou mieux avec un morceau de drap, saupoudré de colophane si la verge est métallique, imbibé d'eau acidulée si l'on opère sur du verre.

Quand la verge doit être libre aux deux bouts, on la soutient par un

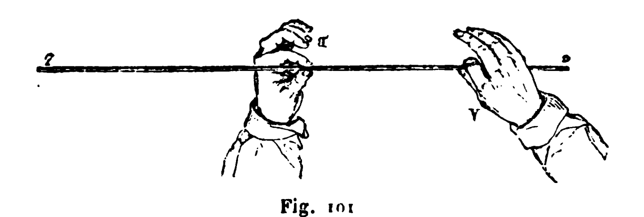


Fig. 101

point où l'on veut avoir un nœud, au milieu par conséquent (fig. 101) si l'on cherche à en tirer le son fondamental, au quart si l'on désire l'octave.

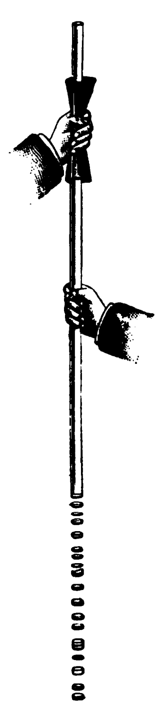


Fig. 102

Chaque extrémité est alors un ventre ; le déplacement des molécules parallèlement à l'axe y est maximum. Nous avons déjà vu (324) comment on peut rendre manifeste le va-et-vient de la section extrême. Savart ([1]) a mesuré l'amplitude de ce mouvement au moyen d'un sphéromètre, et il a trouvé qu'en vibrant une verge s'allonge autant que sous une traction de plusieurs milliers de kilogrammes. L'allongement peut même aller jusqu'à la rupture ; et c'est une circonstance dont il faut tenir compte dans les calculs de résistance des matériaux : on ne devra jamais oublier qu'un faible effort répété peut produire des déformations que n'occasionnerait pas une force incomparablement supérieure appliquée en une seule fois ([2]). Ainsi en faisant vibrer un peu fortement une verge de

([1]) SAVART, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXV, 12, 138 et 225 ; 1824.

([2]) L'accident du pont d'Angers, dont les câbles en fer se rompirent sous le pas cadencé d'un régiment, est demeuré tristement célèbre.

cristal, on la verra se briser en un grand nombre de fragments par des cassures perpendiculaires à l'axe.

Aux nœuds le mouvement est nul, mais la condensation est maximum. Biot [1] a montré le changement de densité aux nœuds par une expérience devenue justement classique et qui s'appuie sur le fait suivant que nous étudierons plus loin : Si entre deux spaths croisés et éteignant toute lumière on place une lame de verre ordinaire, l'obscurité persiste. Mais si, par un procédé quelconque, on détruit dans ce verre l'égalité de répartition des molécules, si par exemple on fléchit la lame entre les doigts, la lumière reparaît. Biot dispose donc entre deux spaths croisés une longue lame de verre de manière que le faisceau lumineux concentré par une lentille traverse cette lame tout près de l'endroit où elle est

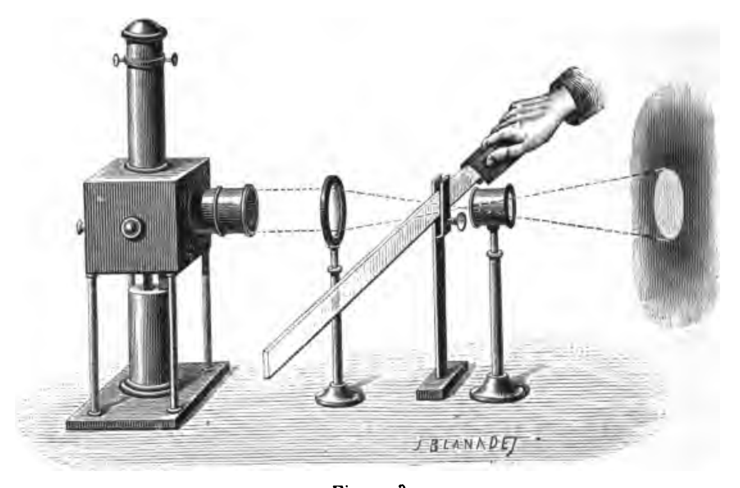


Fig. 103

saisie dans la pince qui la supporte ; la lumière reste éteinte. Fait-on vibrer la verge, l'oreille entend un son et en même temps l'œil voit une tache brillante illuminer l'écran. Cette tache, bien qu'elle semble persister tant que dure le son, est en réalité intermittente : l'intensité lumineuse, maximum quand la condensation ou la dilatation est elle-même maximum, s'annule chaque fois que la variation de densité, changeant de signe, passe par zéro. Le phénomène

[1] Biot, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XIII, 386 ; 1820.

est d'ailleurs d'autant moins marqué qu'on s'éloigne davantage d'un nœud, et il disparaît complètement à un ventre, où la condensation est nulle.

Applications à la musique et à la mesure de la vitesse du son dans les solides. — Les sons que donnent les verges vibrant longitudinalement ne sont pas dénués de charme, et Marloye a construit avec des verges de bois, implantées d'un bout dans un soc et libres de l'autre, une sorte de harpe à frottement, dont un exécutant habile pourrait sans doute tirer parti.

Mais l'application la plus importante que l'on ait faite de ce genre de vibrations est leur emploi à la mesure de la vitesse du son dans les corps solides.

Chladni ([1]), partant de ce fait que les vitesses dans deux verges quelconques, une tige solide et une colonne d'air par exemple, de même longueur, sont dans le même rapport que les hauteurs des sons rendus par ces deux verges, dressa le tableau suivant des vitesses de propagation du son dans les solides, la vitesse dans l'air étant prise pour unité : étain, à peu près 7 1/2; argent, 9; cuivre, 12; fer, verre, 17; bois divers, de 11 à 18.

M. Kundt ([2]), en ajustant à son tube à poussière (367) des verges de différentes natures, a pu déterminer plus facilement et plus exactement ces vitesses relatives; il a trouvé ainsi :

Laiton	10,87
Cuivre	11,96
Acier	15,34
Verre	15,25

Ces nombres sont presque identiques à ceux que Wertheim avait déduits de mesures des coefficients d'élasticité (348) ([3]).

376. Vibrations longitudinales des cordes. — On peut faire vibrer longitudinalement une corde de la même manière qu'une tige. C'est alors l'élasticité et non plus la tension de la

([1]) Chladni, *Traité d'acoustique*, 318.
([2]) Kundt, *Pogg. Ann.*, CXXVII, 497; 1866.
([3]) On conçoit sans peine comment inversement les vibrations longitudinales permettent d'obtenir les coefficients d'élasticité (152).

corde qui intervient. Le son fondamental, comme pour une verge fixée aux deux bouts, est donné par la formule

$$N_l = \frac{V}{2L},$$

ou encore, V étant remplacé par sa valeur connue (348),

$$N_l = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{gE}{p}}.$$

Si l'on rapproche cette expression de celle qui représente le nombre des vibrations du son fondamental de la corde vibrant transversalement (369)

$$N_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gT}{PL}},$$

en remarquant que $p = \frac{P}{LS}$, on a

$$\frac{N_l}{N_t} = \frac{\sqrt{\frac{gES}{PL}}}{\sqrt{\frac{gT}{PL}}} = \sqrt{\frac{ES}{T}},$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{N_l}{N_t} = \sqrt{\frac{E}{\tau}},$$

τ étant la tension par unité de surface $\frac{T}{S}$,

ou

$$\frac{N_l}{N_t} = \sqrt{\frac{L}{\lambda}},$$

λ étant l'allongement que la corde de longueur L éprouve sous la tension T, allongement défini, d'après l'équation (9) du paragraphe 142, par $\lambda = \frac{TL}{ES}$,

et, sous l'une ou l'autre de ces deux formes, on voit que le son dû

aux vibrations longitudinales est beaucoup plus élevé que celui qui résulte des vibrations transversales.

Les sons que l'on tire des cordes excitées longitudinalement sont en effet remarquables par leur acuité ([1]).

II. — VIBRATIONS TRANSVERSALES.

377. Théorie. — Le problème des vibrations transversales, attaqué déjà par D. Bernoulli ([2]), a été résolu pour la première fois par Euler ([3]); il fut ensuite repris et développé par Riccati ([4]), Cauchy ([5]), Poisson ([6]), et plus récemment par Strehlke ([7]), Lissajous ([8]) et Seebeck ([9]).

Quand une verge élastique est fléchie perpendiculairement à sa longueur, les forces élastiques longitudinales, développées dans chaque section droite de la barre, contrebalancent à l'état d'équilibre l'effet des actions transversales (151), et déterminent avec celles-ci à l'état dynamique le mouvement de la verge.

Prenons pour axe des x la direction du filet moyen de la verge en repos, et pour axe des y la perpendiculaire en un point de cette droite dans le plan de flexion. Supposons toujours l'épaisseur de la verge petite par rapport à sa longueur et bornons-nous à de petites déformations : le mouvement sera alors le même pour tous les points d'une même section droite, et il suffira de considérer le filet moyen; chaque point x de ce filet oscillera suivant une petite droite perpendiculaire à la direction naturelle de la fibre moyenne, y sera l'écart à l'époque t. Considérons le prisme élémentaire li-

([1]) Pour étudier les vibrations longitudinales d'une corde il est bon de remplacer les chevalets du sonomètre par des mâchoires garnies de plomb, afin de limiter plus exactement la longueur de la portion en mouvement.

([2]) D. Bernoulli, *Comment. Acad. Petrop.*, XIII, 186; 1741.

([3]) Euler, *Act. Acad. Petrop.* pro anno 1779; pars 1, 103.

([4]) Riccati, *Memorie di mat. e fis. della Societa Italiana*, I, 484, Vérona; 1782.

([5]) Cauchy, *Exercices de mathématiques;* 1827.

([6]) Poisson, *Mémoires de l'Institut;* 1828; et *Traité de mécanique*, 2e éd., II, 368; 1833.

([7]) Strehlke, *Pogg. Ann.*, XXVII, 505, et XXVIII, 512; 1833.

([8]) Lissajous, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXX, 385; 1833.

([9]) A. Seebeck, *Abhand. d. math. phys. Clas. d. k. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch.*, 133. Leipzig; 1849.

mité par les deux sections droites x et $x+dx$; le mouvement transversal de ce prisme est réglé par l'équation

$$\mathrm{P}-\left(\mathrm{P}+\frac{d\mathrm{P}}{dx}dx\right)=\mathrm{SD}\,dx\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{\mathrm{SD}}\frac{d\mathrm{P}}{dx}, \qquad (1)$$

P étant la force élastique tangentielle (force de glissement, effort tranchant) dans la section x, S l'aire de cette section que nous supposerons uniforme tout le long de la barre, et D la densité de la matière constitutive de celle-ci.

Pour déterminer la force P, appliquons le théorème des moments (58) par rapport à un axe perpendiculaire au plan de flexion et passant par le centre de gravité du prisme élémentaire. La somme des moments des forces P est $-\mathrm{P}dx$. Le moment des forces élastiques longitudinales pour la section x est $\frac{E\mathrm{I}}{\mathrm{R}}$ [1], E étant toujours le coefficient d'élasticité du corps, I le moment d'inertie de la section $\int r^2 d\mathrm{S}$, et R le rayon de courbure de la verge au point x, dont l'inverse peut être pris égal à $\frac{d^2y}{dx^2}$; pour la section voisine ce sera $E\mathrm{I}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}dx\right)$, et pour les deux ensemble $E\mathrm{I}\frac{d^3y}{dx^3}dx$. On a donc

$$-\mathrm{P}+E\mathrm{I}\frac{d^3y}{dx^3}=0, \text{ [2]}$$

[1] Nous avons trouvé en effet pour moment de ces forces dans le cas d'une barre prismatique (151)

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} Eh\frac{d\theta}{dx}y^2dy=E\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} h\,dy\,y^2\frac{d\theta}{dx}=\frac{E\mathrm{I}}{\mathrm{R}}.$$

[2] Nous négligeons ici, au deuxième membre, le terme $\mathrm{ID}\frac{d^3y}{dx\,dt^2}$, provenant de l'inertie due aux petites rotations alternatives des sections transversales de la verge que l'axe en se courbant incline en des sens alternativement opposés, inertie du même ordre que les quantités négligées plus haut.

ou

$$P = EI\frac{d^3y}{dx^3}\ (^1). \qquad (2)$$

En portant cette valeur dans (1), et en posant

$a^2 = \frac{E}{D}$ (a vitesse des vibrations longitudinales)

et $b^2 = \frac{I}{S}$ (b rayon de gyration de la section autour d'un axe mené par son centre de gravité perpendiculairement au plan de flexion),

on obtient l'équation des verges vibrantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2b^2\frac{d^4y}{dx^4} = 0. \qquad (3)$$

Cherchons si un mouvement pendulaire d'amplitude variable u peut satisfaire à cette relation ; posons en conséquence

$$y = u\cos\left(\frac{ab}{L^2}m^2t + \varepsilon\right), \qquad (4)$$

L étant la longueur de la barre et m un nombre abstrait qu'il s'agit de déterminer. En portant cette valeur de y dans (3), on a

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{m^4}{L^4}u. \qquad (5)$$

Si $u = e^{p\frac{mx}{L}}$ est une solution particulière, p est une des quatre ra-

(1) C'est le théorème fondamental pour l'étude de la résistance des matériaux : la force tangentielle totale dans une direction transversale quelconque est égale à la dérivée, par rapport à la coordonnée longitudinale, du moment de flexion autour d'une droite tracée sur la section perpendiculairement à cette direction.

cines quatrièmes de l'unité, $+1$, -1, $+i$, $-i$; la solution complète est donc

$$u = \alpha \cos m\frac{x}{L} + \beta \sin m\frac{x}{L} + \gamma e^{\frac{mx}{L}} + \delta e^{-\frac{mx}{L}}, \qquad (6)$$

ou, si l'on introduit les cosinus et les sinus hyperboliques (¹), et si l'on pose pour abréger $x' = m\frac{x}{L}$,

$$u = A(\cos x' + \text{coh}\, x') + B(\cos x' - \text{coh}\, x') + C(\sin x' + \text{sih}\, x') + D(\sin x' - \text{sih}\, x'). \quad (7)$$

L'expression de u contient donc quatre constantes, les trois rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, et m, que détermineront les quatre conditions initiales (deux à chaque bout).

Nous examinerons successivement les six cas qui peuvent se présenter suivant que chaque extrémité est *libre*, ou *fixée* (encastrée dans une paroi inébranlable, à laquelle elle reste constamment perpendiculaire), ou *appuyée* (butée contre un obstacle qui ne gêne point sa flexion).

1° *Les deux bouts libres.* — Sur une section libre le moment d'élasticité $\frac{EI}{R}$ est constamment nul et aussi la force de glissement P; on doit donc avoir à toute époque $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$.

Par conséquent, il faut d'abord que, pour $x = 0$, $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$, ce qui exige que $B = 0$ et $D = 0$, de sorte que l'équation (8) se réduit à

$$u = A(\cos x' + \text{coh}\, x') + C(\sin x' + \text{sih}\, x').$$

(¹) Ces fonctions sont définies, comme l'on sait, par les équations

$$\text{coh}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\text{sih}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

d'où la relation fondamentale

$$\text{coh}^2 x - \text{sih}^2 x = 1.$$

Il faut en outre que $\frac{d^2u}{dx^2}$ et $\frac{d^3u}{dx^3}$ s'annulent encore pour $x=l$ ou pour $x'=m$, ce qui donne [1]

$$\left.\begin{array}{l} A(-\cos m+\operatorname{coh} m)+C(-\sin m+\operatorname{sih} m)=0, \\ A(\ \sin m+\operatorname{sih} m)+C(-\cos m+\operatorname{coh} m)=0, \end{array}\right\}$$

équations dont la compatibilité exige que

$$(\operatorname{coh} m-\cos m)^2=\operatorname{sih}^2 m-\sin^2 m,$$

ou

$$\cos m \operatorname{coh} m=1. \tag{8}$$

Telle est l'équation qui détermine les valeurs de m convenant à la question [2].

Si cette équation est satisfaite, les deux équations de condition fournissent pour le rapport $\frac{C}{A}$ une seule et même valeur qui, substituée dans l'expression précédente de u, donne (à un facteur constant près, H)

$$u=(\cos m-\operatorname{coh} m)\left(\cos\frac{mx}{l}+\operatorname{coh}\frac{mx}{l}\right)+(\sin m+\operatorname{sih} m)\left(\sin\frac{mx}{l}+\operatorname{sih}\frac{mx}{l}\right);$$

et la solution harmonique simple cherchée est, avec cette valeur de u,

$$y=\mathrm{H}u\cos\left(\frac{ab}{\mathrm{L}^2}m^2t+\varepsilon\right). \tag{9}$$

[1] Nous rappellerons que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{coh}x=\operatorname{sih}x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sih}x=\operatorname{coh}x,$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{coh}x=\operatorname{coh}x, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sih}x=\operatorname{sih}x,$$

et ainsi de suite.

[2] POISSON, *loc. cit.*

Le nombre des vibrations de ce mouvement est

$$N = \frac{ab}{2\pi L^2} m^2. \qquad (10)$$

Ainsi,

1° Une verge libre aux deux bouts peut rendre une série de sons dont les nombres de vibrations sont entre eux comme les carrés m^2 des nombres définis par l'équation (8). Les valeurs de m satisfaisant à cette équation étant

$$(3{,}011)\frac{\pi}{2}, \quad (5{,}000)\frac{\pi}{2}, \quad (7{,}000)\frac{\pi}{2}, \quad \ldots\ldots \quad (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

les sons considérés varient à très peu près comme les carrés des nombres impairs successifs :

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} \frac{(2n+1)^2}{4}, \qquad (11)$$

cette loi étant d'autant plus approchée que l'ordre n du son est plus élevé ;

2° Un son d'ordre donné est inversement proportionnel au carré L^2 de la longueur de la verge, directement proportionnel au rayon de giration b et par conséquent à l'épaisseur (ou au diamètre) de la verge et indépendant de la largeur, directement proportionnel enfin à la vitesse a des vibrations longitudinales dans la substance considérée;

3° Les nœuds sont placés aux points x pour lesquels $u=0$ [1], c'est-à-dire, sur une barre de longueur 1, aux points

Son.	Nœuds.								
1	0,224	0,776							
2	0,132	0,500	0,868						
3	0,094	0,357	0,643	0,906					
..	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	$\frac{1{,}322}{4n+2}$	$\frac{4{,}982}{4n+2}$	$\frac{9{,}001}{4n+2}$	.....	$\frac{4k-3}{4n+2}$	.....	$\frac{4n-7{,}001}{4n+2}$	$\frac{4n-2{,}982}{4n+2}$	$\frac{4n+0{,}678}{4n+2}$.

(1) Les points de recoupement ne coïncident pas avec les points d'inflexion, lesquels correspondent aux nœuds de la barre fixée-fixée ; mais, sauf pour les nœuds extrêmes, les deux sortes de points sont très voisins.

Dès que le son est d'ordre n un peu élevé, et quand le rang k des nœuds est supérieur à 3 et inférieur à $n-3$, c'est-à-dire pour toute la région moyenne de la verge, les nœuds sont également espacés et la distance de deux nœuds consécutifs est, la longueur L de la verge remise en évidence,

$$D = \frac{2L}{2n+1}. \qquad (12)$$

Les ventres, en dehors des extrémités 0 et 1, sont placés aux points où u est maximum :

Son.	Nœuds.		
1	0,500	(où l'amplitude est 0,608, l'excursion aux extrémités étant 1)	
2	0,308	et 0,692 (où l'amplitude est 0,664)	
3	0,220	0,780 (où l'amplitude est 0,935)	et 0,500 (où elle est moindre).

2° *Les deux bouts fixés.* — La fixité d'une extrémité est définie par les deux conditions $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=0$. Quand l'extrémité était libre nous avions $y''=0$ et $\frac{dy''}{dx}=0$, y satisfaisant d'ailleurs à l'équation différentielle (3). Le cas actuel se ramène donc immédiatement au précédent. La même équation

$$\cos m \operatorname{coh} m = 1 \qquad (8)$$

règle la succession des nombres m, dont les carrés déterminent la suite des sons que peut rendre la verge ; on a donc encore très sensiblement, sauf pour le son fondamental,

$$N = \frac{\pi}{2}\frac{ab}{L^2}\frac{(2n+1)^2}{4}. \qquad (11)$$

Les nœuds, en dehors des deux extrêmes coïncidant avec les bouts mêmes, sont placés comme il suit :

Son.	Nœuds.						
1	»						
2	0,500						
3	0,359	0,641					
..	......	......	......	......	......	......	......
n	$\frac{5,018}{4n+2}$	$\frac{8,999}{4n+2}$	.....	$\frac{4k+1}{4n+2}$	.....	$\frac{4n-6,999}{4n+2}$	$\frac{4n-3,018}{4n+2}$.

La distance de deux nœuds consécutifs vers le milieu de la verge, rendant un son d'ordre un peu élevé, est encore

$$D = \frac{2L}{2n+1}. \qquad (12)$$

3° *Un bout libre, un bout fixé.* — Les coefficients A et C s'annulant alors, u prend la forme

$$u = (\cos m + \operatorname{coh} m)\left(\cos\frac{mx}{l} - \operatorname{coh}\frac{mx}{l}\right) + (\sin m - \operatorname{sih} m)\left(\sin\frac{mx}{l} - \operatorname{sih}\frac{mx}{l}\right),$$

et y peut encore être représenté par un mouvement harmonique simple (9), m étant défini par l'équation

$$\cos m \operatorname{coh} m = -1.$$

Les racines de cette équation étant

$$(1,194)\frac{\pi}{2}, \quad (2,989)\frac{\pi}{2}, \quad (5,000)\frac{\pi}{2}, \quad (7,000)\frac{\pi}{2}, \quad \ldots\ldots, \quad (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

les différents sons que peut rendre la verge, à l'exception des deux premiers, sont encore entre eux sensiblement comme la suite des carrés des nombres impairs,

$$N = \frac{\pi}{2}\frac{ab}{L^2}\frac{(2n-1)^2}{4}; \text{ [1]} \qquad (11)'$$

Mais le son fondamental de la barre libre-fixée est au son fondamental de la barre libre-libre ou fixée-fixée, comme $(1,194)^2 : (3,011)^2 = 1 : 6,36$, soit plus de deux octaves et demie au-dessous.

[1] Si la barre n'était pas suffisamment mince, l'inertie rotatoire pourrait amener un abaissement sensible des sons élevés ; la hauteur exacte étant en effet $N' = N\left[1 - \left(m + \frac{m^2}{2}\right)\frac{b^2}{L^2}\right]$, le terme en $\frac{b^2}{L^2}$ ne serait plus négligeable pour les grandes valeurs de m (Lord Rayleigh, *loc. cit.*, I, 239).

Les nœuds, en dehors de l'extrémité fixe, se placent aux distances suivantes du bout libre :

Son.	Nœuds.							
1	»							
2	0,226							
3	0,132	0,500						
4	0,094	0,356	0,644					
..	....	....	....	....	....	....	....	....
n	$\frac{1{,}322}{4n-2}$	$\frac{4{,}982}{4n-2}$	$\frac{9{,}001}{4n-2}$	.....	$\frac{4k-3}{4n-2}$	.....	$\frac{4n-10{,}999}{4n-2}$	$\frac{4n-7{,}018}{4n-2}$.

Quand le son est élevé, vers le milieu de la barre les nœuds sont équidistants de

$$D = \frac{2L}{2n+1}. \qquad (12)'$$

4° *Un bout libre, un bout appuyé.* — Dans ces conditions, la verge se comporte comme une demi-verge libre aux deux bouts vibrant suivant un mode pair, avec un nœud au milieu.

5° *Un bout fixé, un bout appuyé.* — Les vibrations de la verge sont alors les mêmes que celles d'une demi-barre fixée aux deux bouts, vibrant avec un nœud central.

6° *Les deux bouts appuyés.* — Les conditions analytiques qui traduisent l'appui sont $y=0$ et $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, le moment d'élasticité devant être nul sur la tranche extrême. Il en résulte d'abord $A=0$ et $B=0$, puis $C-D=0$, et $\sin m=0$; de sorte que la solution, la seule qu'Euler ait établie complètement, est

$$y = H \sin \frac{n\pi x}{L} \cos\left(\frac{n^2\pi^2 ab}{L^2} t - \varepsilon\right),$$

n étant un nombre entier quelconque.

La verge présente alors les formes d'une corde vibrante, se partageant en n segments égaux qui vibrent à l'unisson :

$$D = \frac{L}{n}. \qquad (12)''$$

Mais la loi de succession des sons est différente, les nombres de vibrations variant comme les carrés des nombres entiers consécutifs,

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} n^2. \qquad (12)''$$

Loi de Lissajous. — Quelles que soient les conditions aux extrémités, si l'on compare, pour les sons d'ordre un peu élevé, le nombre N des vibrations à la distance D des nœuds intermédiaires, on a

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{D^2}.$$

Chaque internœud vibre comme une lame de même longueur dont les deux extrémités seraient appuyées; et le nombre des vibrations, toutes choses égales d'ailleurs, est inversement proportionnel au carré de la distance D *entre deux nœuds consécutifs* [1].

L'influence des extrémités ne s'exerce donc pas sensiblement sur la partie intermédiaire de la lame, qui se comporte de même dans tous les cas.

Propagation du mouvement transversal dans une verge. — Tout en négligeant des quantités sans importance, nous n'en avons pas moins rencontré dans la théorie des vibrations transversales des verges une complication plus grande que dans la théorie des vibrations transversales des cordes. La raison de l'extrême simplicité de celle-ci réside, comme le fait remarquer lord Rayleigh [2], en ce fait que les ondes du type harmonique se propagent dans la corde avec une vitesse indépendante de la longueur d'onde, de sorte qu'une onde quelconque y voyagera sans altération. Dans les verges, la constante de l'équation différentielle (3) ne représente plus une vitesse.

Soit un mouvement harmonique

$$y = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

(1) Lissajous, *loc. cit.*, 408.
(2) Lord Rayleigh, *loc. cit.*, I, 246.

ou, la vitesse étant mise en évidence au moyen de la relation fondamentale $\lambda = V\tau$ [1],

$$y = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(Vt - x),$$

mouvement transversal entretenu à l'origine, et se propageant dans la verge sous la forme d'un train d'ondes identiques. Pour satisfaire à l'équation (3), ce train doit marcher avec la vitesse

$$V = \frac{2\pi ab}{\lambda},$$

inversement proportionnelle à λ.

Une onde complexe, formée de la superposition de plusieurs mouvements simples, se déformera donc en se transmettant. Soient par exemple deux mouvements vibratoires de même amplitude et de longueurs d'ondes très peu différentes, se propageant ensemble dans un même milieu,

$$y = \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau'} - \frac{x}{\lambda'}\right) = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(Vt - x) + \cos\frac{2\pi}{\lambda'}(V't - x).$$

Cette équation pouvant s'écrire

$$y = 2\cos\pi\left[t\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) - x\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)\right]\cos\pi\left[t\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'}\right) - x\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)\right],$$

on voit que la progression simultanée de ces deux mouvements harmoniques se présente comme un train d'ondes de même période $\tau_1 = 2\frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'}$, de même longueur d'onde $\lambda_1 = 2\frac{\lambda\lambda'}{\lambda + \lambda'}$, mais d'amplitudes oscillant lentement entre 0 et 2, de sorte que le train entier est formé d'une série de groupes séparés par des intervalles relativement libres (battements). Dans une corde vibrant transversalement, comme dans un cylindre élastique vibrant longitudinalement, λ varie proportionnellement à τ, et les différents groupes

[1] Dans cette relation, qui est à proprement parler la définition de λ, on doit regarder la période τ comme donnée (c'est la caractéristique du son considéré), et la vitesse de propagation V comme une fonction de τ et par suite de $\lambda = V\tau$.

avancent avec la même vitesse que le train lui-même. Il n'en est plus de même dans une verge animée de vibrations transversales, dont la vitesse de propagation est fonction de la longueur d'onde. La position au temps t du milieu du groupe qui se trouvait initialement à l'origine est donnée par l'équation

$$t\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau'}\right)-x\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)=0,$$

la vitesse du groupe est donc

$$U=\frac{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau'}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}}=\frac{d\frac{1}{\tau}}{d\frac{1}{\lambda}},$$

ou, d'après la relation fondamentale $\tau=\frac{\lambda}{V}$,

$$U=\frac{d\frac{V}{\lambda}}{d\frac{1}{\lambda}}.$$

Si donc $V=K\lambda^{-1}$,

$$U=2V. \text{ [1]}$$

[1] D'une manière générale, si la vitesse du train V varie comme λ^n, la vitesse du groupe est

$$U=(1-n)V.$$

A la surface d'une eau profonde où $V=K\lambda^{\frac{1}{2}}$, $U=\frac{1}{2}V$. On a remarqué en effet depuis longtemps que lorsqu'un groupe d'ondes avance sur l'eau, la vitesse du groupe est moindre que celles des ondes qui le constituent : celles-ci paraissent avancer à travers le groupe, s'éteignant quand elles approchent de son front. Le tableau suivant, emprunté à lord Rayleigh, résume les cas particuliers les plus intéressants.

$V=K\lambda$	$U=0$	Mouvements pendulaires (REYNOLD, *Nature*, 23 Aug. 1877).
$V=K\lambda^{\frac{1}{2}}$	$U=\frac{1}{2}V$	Ondes liquides pesantes.
$V=K\lambda^{0}$	$U=V$	Ondes aériennes.
$V=K\lambda^{-\frac{1}{2}}$	$U=\frac{3}{2}V$	Ondes liquides capillaires (W. THOMSON, *Phil. Mag.* Nov. 1871.
$V=K\lambda^{-1}$	$U=2V$	Ondes de flexion.

378. Expériences. — Les vibrations transversales des verges ont été étudiées expérimentalement dans chacun des cas distingués plus haut.

1° *Les deux bouts libres.* — Poisson, ayant traité spécialement ce cas, détermina le rapport des sons fondamentaux rendus par une verge libre aux deux bouts et vibrant d'abord transversalement, puis longitudinalement, et il pria Savart de mesurer expérimentalement ce même rapport.

Voici le calcul très simple de Poisson.

Le son fondamental d'une verge vibrant transversalement est

$$N = \frac{(3{,}011)\pi^2}{8}\frac{ab}{L^2}.$$

Pour une verge rectangulaire d'épaisseur e et de largeur h, b^2 ou $\frac{1}{S}$ est égal à $\frac{he^3}{12} : he = \frac{e^2}{12}$; donc $b = \frac{e}{2\sqrt{3}}$. Pour une verge circulaire de diamètre e, $b^2 = \frac{\pi e^4}{64} : \frac{\pi e^2}{4} = \frac{e^2}{16}$; donc $b = \frac{e}{4}$.

Une verge rectangulaire vibrant transversalement rend donc le son fondamental

$$N_T = 1{,}028\,\frac{ae}{L^2},$$

et une verge circulaire

$$N'_T = 0{,}890\,\frac{ae}{L^2}.$$

D'ailleurs pour toute verge vibrant longitudinalement le son fondamental est

$$N_L = \frac{a}{2L}.$$

On a donc

$$\frac{N_T}{N_L} = 2{,}056\,\frac{e}{L},$$

et

$$\frac{N'_T}{N_L} = 1{,}780\,\frac{e}{L}.$$

Savart a mesuré le nombre des vibrations longitudinales sur des verges de près de 1 mètre, et en a conclu le nombre des vibrations longitudinales et par suite celui des vibrations transversales qu'effectueraient ces mêmes verges réduites au 1/8 de leur longueur et il l'a comparé au nombre des vibrations transversales qu'accomplissaient effectivement ces verges réduites au 1/8. Nous transcrirons seulement deux des sept résultats ainsi obtenus :

a) Verge parallélipipédique en laiton

$$L = \frac{0^{m},825}{8} \quad e = 3^{mm},92 \quad N_L = 34133 \quad N_T \text{calculé } 2668, \text{ observé } 2667.$$

b) Verge cylindrique en laiton

$$L = \frac{0^{m},825}{8} \quad e = 4^{mm},8 \quad N_L = 34133 \quad N_T \text{calculé } 2829, \text{ observé } 2844.$$

Antérieurement, Chladni avait observé les sons successifs rendus par une même verge (donnant comme son fondamental ut_{-1} quand elle était fixée par un bout et libre à l'autre); et il avait trouvé les notes suivantes, dont les nombres de vibrations sont entre eux comme les nombres placés au-dessous :

$sol_2\sharp$	$ré_4$	$ré_5$	$si_5\flat$	fa_6+	si_6	...
3^2	5^2	7^2	9^2	11^2	13^2	...

L'intervalle $sol_2\sharp : ut_{-1} = 6,25$ diffère peu du rapport théorique, 6,36. Quant à la série des sons successifs observés par Chladni, elle est exacte à partir du deuxième terme; le premier terme seul est un peu faible : 3^2 ou 9 au lieu de $(3,011)^2$ ou 9,066.

Ces déterminations ont été reprises par M. Mercadier [1] à l'aide de la méthode graphique qui lui a permis de vérifier les lois contenues dans la formule $N = K\frac{e}{L^2}$, où K désigne une constante dont la valeur théorique est 102,78 V. Pour l'acier K vaut environ 532 000 (le centimètre étant l'unité de longueur).

[1] Les vibrations de la lame étaient entretenues électriquement comme celles du diapason chronographique (Mercadier, *Journal de physique*, (2), III, 189; 1884).

Strehlke et Lissajous ont mesuré avec soin la position des nœuds. Nous citerons, à titre d'exemple, les nombres relevés par Lissajous sur une lame de laiton longue de 500 millimètres et portant à sa surface une division millimétrique très soignée. Comme on obtenait la distance D de deux nœuds moyens consécutifs en prenant l'intervalle de deux nœuds éloignés et en le divisant par le nombre des internœuds, cette distance s'est trouvée d'autant plus exactement déterminée que le nombre des nœuds était plus grand. La distance d_1 du nœud le plus voisin de l'extrémité à cette extrémité même était mesurée directement aux deux bouts, ainsi que la distance du nœud suivant à l'extrémité : on en a déduit par soustraction la distance d_2 du premier nœud au deuxième. Dans la première colonne est inscrit le nombre des nœuds, égal à $n+1$, n étant toujours le rang du son.

Nombre	d_1			d_2			D	
des nœuds.	calculée.	observée.		calculée.	observée.		calculée.	observée.
5	36,4	36,8	36,9	102,4	101,3	101,7	111,1	111,6
6	30,0	30,0	30,0	83,6	83,0	83,0	90,9	91,0
7	25,4	25,5	25,5	70,7	70,3	70,3	76,9	76,9
8	22,0	22,2	22,2	61,3	60,8	61,0	66,6	66,6
9	19,4	19,6	19,6	54,1	52,5	53,6	58,8	58,8
10	17,3	17,5	17,6	48,4	47,9	47,9	52,6	52,6
11	15,7	15,8	16,0	43,8	43,4	43,2	47,6	47,7
12	14,3	14,4	14,6	40,0	39,6	39,4	43,5	43,5
13	13,2	13,4	13,4	36,8	36,3	36,5	40,0	40,0
14	12,2	12,3	12,4	34,0	33,8	33,6	37,0	37,0

Pour soutenir la verge dans ces expériences, on la fait reposer

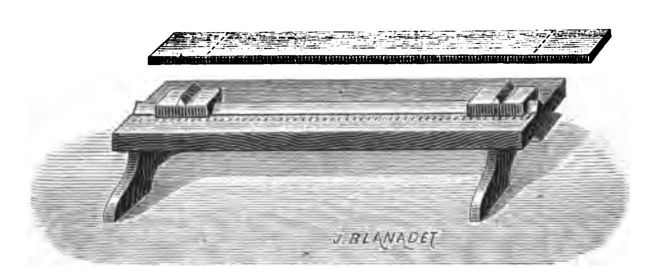


Fig. 104

par deux lignes nodales sur les arêtes de deux couteaux en liège, que supportent de lourds pieds en plomb doublés de drap ; et on

la maintient en appuyant du doigt au-dessus de l'un des couteaux. La verge est attaquée de champ à ce bout avec un archet, ou frappée en un ventre avec un petit marteau; et si l'on a projeté à la surface un peu de sable, selon la méthode de Chladni, on le voit se rassembler sur les lignes nodales et les dessiner nettement, ce qui permet d'abord de rectifier, au besoin, la position des lignes d'appui, lesquelles doivent coïncider avec des nodales pour ne pas contrarier le mouvement de la verge. Il est ensuite facile d'effectuer les mesures voulues.

2° *Les deux bouts fixés.* — Chladni avait reconnu que les sons émis par une verge fixée aux deux bouts sont absolument les mêmes que si les deux bouts sont libres, malgré la grande différence des courbures. Lissajous mesura les distances des nœuds pour les dix-sept premiers sons et les trouva tout à fait conformes à la théorie, quand il eut pris soin d'encastrer complètement chaque extrémité dans un bloc de métal terminé par une face plane normale à la lame (1).

3° *Un bout libre, un bout fixé.* — Chladni donne pour ce cas la suite des sons :

	ut_{-1}	sol_2 ♯	$ré_4$	$ré_5$ —	si_5 ♭	fa_6 +	. . .
ou	1	6 1/4	17 1/2	34 1/4	56 1/2	84	. . .
ou	$(1,2)^2$	3^2	5^2	7^2	9^2	11^2	. . .

Théoriquement, les sons à partir du troisième se succèdent en effet comme les carrés des nombres impairs, le son fondamental étant $(1,194)^2$ et le deuxième $(2,989)^2$.

Pour déterminer les nœuds, Lissajous plaçait la verge horizontalement, l'une des extrémités fixée comme précédemment, tandis qu'un chevalet de liège soutenait la lame suivant une ligne nodale : il pouvait alors attaquer l'extrémité libre à l'archet, et il constatait que les nœuds intermédiaires occupent les mêmes places que dans les deux cas précédents. Les nœuds extrêmes sont l'un au bout fixé,

(1) L'archet ne peut plus alors attaquer la lame que par côté, ce qui tend à produire des vibrations tournantes. Il y a là une difficulté qui arrête même entièrement, si, par hasard, les lignes nodales du son que l'on veut produire se confondent avec les lignes nodales transversales de l'un des modes de vibrations tournantes.

l'autre à une distance du bout libre égale à celle qui l'en séparerait sur une lame entièrement libre et de pareille longueur; les deuxièmes nœuds sont à mêmes distances des extrémités voisines; au delà, les nœuds sont également espacés.

4° *Un bout libre, un bout appuyé.* — Une verge libre-appuyée équivaut à la moitié d'une verge libre-libre vibrant avec un nœud au milieu.

Chladni trouve en effet :

ré$_2$	*si*$_3$ ♭	*si*$_4$ —	*sol*$_5$ ♯	*ré*$_6$ ♯ +	*la*$_6$	. . . ,
5^2	9^2	13^2	17^2	21^2	25^2	. . . ,

le son fondamental étant à celui de la même verge libre-libre comme $5^2 : 6^2$; le rapport exact est $5^2 : 2^2\ (3{,}011)^2$.

De son côté, Lissajous a vérifié que la position des nœuds est la même que dans une lame libre aux deux bouts et de longueur double. La condition de l'appui est pratiquement assez difficile à réaliser : il pressait la lame contre un mur en interposant un liège d'un centimètre d'épaisseur.

5° *Un bout fixé, un bout appuyé.* — L'expérience a de même prouvé qu'une verge fixée-appuyée se comporte identiquement comme chacune des moitiés d'une verge fixée-fixée de longueur double à nœud médian, et par conséquent donne les mêmes sons et présente les mêmes nœuds que libre-appuyée.

6° *Les deux bouts appuyés.* — Chladni a confirmé dans ce cas les résultats de l'analyse d'Euler, aussi bien quant à l'équidistance des nœuds que quant à la hauteur des sons, pour lesquels il obtint la série suivante :

fa$_1$ ♯	*fa*$_3$ ♯	*sol*$_4$ ♯	*fa*$_5$ ♯	*ré*$_6$	*sol*$_6$	. . . ,
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	. . . ,

en remarquant que le son fondamental est à celui du premier cas comme $2^2 : 3^2$.

379. Vibrations complexes ; caléidophone. — Les vibrations d'une verge ne s'effectuent généralement pas dans un plan ;

mais son mouvement peut être considéré comme résultant de la superposition de deux mouvements vibratoires rectangulaires, obéissant aux lois que nous venons d'établir. Wheatstone [1], à qui l'on doit la découverte de ce fait, employait un appareil trés ingénieux et très simple, le *caléidophone* (καλός beau, εἶδος forme, et φωνή voix), série de verges implantées verticalement dans une planchette solide, et portant à leur extrémité supérieure une petite sphère (perle étamée, boule d'acier poli) sur laquelle la lumière forme un point brillant. Vient-on à ébranler une de ces verges, son point lumineux dessine une courbe qui semble continue et qui, en général, se déforme graduellement d'après une loi déterminée. Avec des verges longues et déliées, favorables aux sons supérieurs, des sinuosités variées se superposent à la courbe principale et donnent des effets curieux. Mais c'est cette courbe même qui est particulièrement intéressante ; nous l'étudierons en détail au prochain chapitre.

380. Instruments à verges. — Les verges libres aux deux bouts se rencontrent dans un instrument fort primitif, le *claque-bois*, série de planchettes *ab*, *a'b'*, de longueur et d'épaisseur

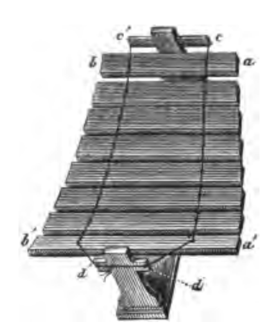


Fig. 105

convenables, soutenues aux nœuds du son fondamental par des ficelles *cd*, *c'd'*, ou des tresses de paille (il prend alors le nom de *violon de paille*), et que l'on frappe avec une baguette terminée

[1] WHEATSTONE, *Quarterly Journal of science*, I; 1827.

par un tampon élastique. La vogue fut quelque temps aux *carillons*, aux *harmonicas*, constitués de même par des lames de métal ou de verre; Mozart en avait introduit un dans la *Flûte enchantée* pour imiter le son des cloches. Nos orchestres emploient encore, sous le nom de *triangle*, une longue verge rendant par percussion une abondance de sons supérieurs.

Le *violon de fer* est un instrument formé de tiges de fer fixées à leur partie inférieure sur une caisse d'harmonie, libres à leur partie supérieure, et dont un archet habile peut tirer des sons acceptables. Les *anches* appartiennent à ce genre de verges, que l'on trouve également dans les *boîtes à musique*.

Mais l'application la plus importante des verges vibrantes est le *diapason*.

381. Diapason. — Le diapason est une fourche métallique à queue faisant corps avec les branches (et non rapportée). Les

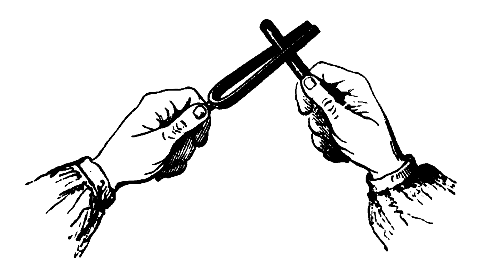


Fig. 106

deux branches sont égales et vibrent à l'unisson; chacune d'elles se comporte sensiblement comme une verge libre à un bout et fixée par l'autre, ce bout fixe étant la région où la branche considérée s'appuie contre sa jumelle par l'intermédiaire de la partie courbe [1].

La hauteur du son fondamental est donc indépendante de la

[1] Cette manière de voir n'était pas celle de Chladni, qui regardait le diapason comme une verge libre aux deux bouts et simplement repliée sur elle-même; mais la loi de succession des sons supérieurs (von Helmholtz) et le nombre absolu des vibrations du son fondamental (Mercadier) montrent que l'assimilation de Chladni n'était pas exacte.

largeur (nous appelons toujours ainsi la dimension perpendiculaire au plan de vibration), proportionnelle à l'épaisseur e, et en raison inverse du carré de la longueur L,

$$N = K\frac{e}{L^2}\ (^1),$$

K désignant une constante ([2]), égale pour l'acier à environ 82 000, l'unité de longueur étant toujours le centimètre.

Les sons supérieurs se succèdent suivant la loi précédemment établie :

1   6 1/4   17 1/2   34 1/4   56 1/2   . . .

En même temps, le diapason présente les systèmes de nœuds et de ventres indiqués par les figures ci-contre. Quand le diapason

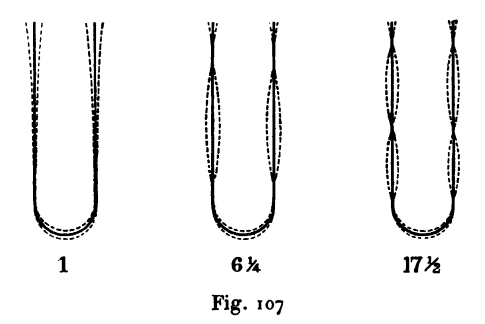


Fig. 107

rend le son fondamental, on a un nœud au bas de chaque branche, au bout fixe de la verge ; et le tronçon situé entre ces deux nœuds, y compris la queue qui fait corps avec lui, vibre à l'unisson des branches. Le premier son supérieur correspond à la présence de deux nœuds ([3]) sur chaque branche ; et ainsi de suite.

([1]) Dans cette formule, L doit être remplacé, d'après M. Mercadier, par 1,012 l, l étant la projection de la ligne médiane d'une branche sur le plan de symétrie de l'instrument (MERCADIER, C. R., LXXIX, 1001 et 1069 ; 1874).

([2]) En général, $K = 0{,}164\ V$.

([3]) Chladni avait déjà reconnu que le premier son supérieur, dont il avait déterminé la hauteur, correspondait à un nombre total de 4 nœuds, et que le système de 3 nœuds faisait défaut.

Les sons supérieurs ne sont pas absolument constants. Ils varient un peu selon la forme du diapason. Sur différents diapasons, M. Tyndall trouve pour le premier son supérieur des valeurs comprises entre 5,8 et 6,6. Deux diapasons, en apparence identiques et exactement à l'unisson quant au son fondamental, donnent en général des battements (386) sur le premier son supérieur, battements que l'on perçoit nettement si, après avoir ébranlé chaque diapason de manière à lui faire rendre simultanément les deux sons (¹), on le touche en un nœud du premier son supérieur, qui alors subsiste seul. Quelles que soient ces petites variations, les sons supérieurs s'élèvent très vite, et l'oreille les distingue aisément du son fondamental, beaucoup plus intense (²). Ils disparaissent d'ailleurs promptement, et au tintement initial succède bientôt un son simple, pendulaire, le son fondamental seul.

Le diapason est ainsi le véritable étalon de hauteur musicale (327). Pour que la hauteur du son émis par un diapason soit absolument déterminée, il est nécessaire toutefois que les oscillations restent très petites (pratiquement que l'amplitude ne dépasse pas le 1/100 de la longueur des branches), et que la température soit constante. D'habitude les diapasons sont accordés pour la tem-

(¹) A cet effet on attaquera le diapason à l'archet, alternativement au bout et au milieu des branches. L'expérience est particulièrement aisée avec un diapason à branches minces, d'où l'on tirerait sans plus de peine le son fondamen-

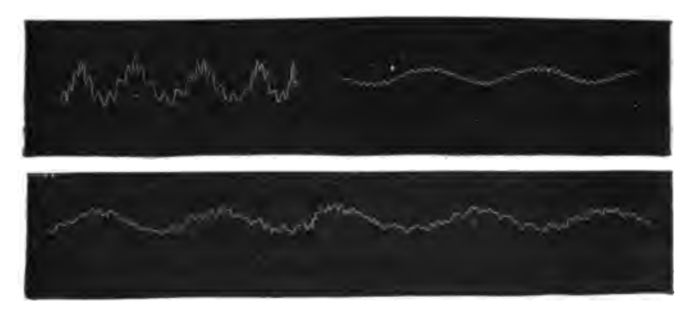


Fig. 108

tal et le deuxième son supérieur, ou même le son fondamental et les deux premiers sons supérieurs, comme le montrent les tracés ci-joints.

(²) On évite tout à fait le premier son supérieur, le seul habituellement sensible, en attaquant le diapason au point où ce son aurait un nœud.

pérature ordinaire [1] : le nombre de vibrations d'un diapason d'acier diminue de 1/8943 quand la température s'élève de 1°(Kœnig) [2]. L'effet de la température consiste surtout dans la modification de l'élasticité, l'influence de la dilatation étant relativement faible.

Si le diapason est monté sur une caisse de résonnance, celle-ci



Fig. 109

peut altérer l'isochronisme et le nombre des vibrations. Cette altération se produit quand le ton propre du système renforçant est très voisin de celui du diapason. Alors le diapason, attaqué à l'archet, fait entendre un son très fort, une sorte de cri, qui s'éteint très vite. Au contraire, quand le ton propre de la caisse est aussi éloigné de celui du diapason qu'il peut l'être sans que la résonnance cesse d'être sensible, le son du diapason est simplement renforcé, mais il ne subit aucune modification dans sa hauteur, et conserve une longue durée [3].

L'isochronisme des petites oscillations du diapason, à température constante, en fait un chronographe précieux (331). Dans les applications chronographiques, il est souvent utile de maintenir le mouvement vibratoire qui de lui-même s'éteint assez vite. A cet effet on se sert de l'électricité : Lissajous [4], qui le premier eut

(1) Le diapason normal français a été établi par Lissajous avec 435 ^{vd} à 15°; toutefois il ne battrait exactement ses 435 ^{vd} qu'à 24° 1/4, d'après Kœnig. Ce constructeur ajuste tous ses diapasons à 20°.

(2) Ainsi pour $ut_1 = 64^{vd}$, la variation correspondant à 1° est — $0^{vd},00715$
— $ut_3 = 256$ — — — $0^{vd},02860$.

(3) Kœnig, *loc. cit.*, 180.

(4) Lissajous, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 147; 1857.

recours à ce procédé, disposait en face de chaque branche, munie au besoin d'un contact, un électro-aimant dont le courant était périodiquement rompu par un interrupteur vibrant, disposé de façon que sa période fût un sous-multiple exact de celle du diapason. M. von Helmholtz employa comme interrupteur un autre diapason de hauteur convenable. Actuellement on utilise à cet effet le diapason lui-même, et on ne fait plus usage que d'un seul électro-aimant intérieur : la figure ci-contre représente l'électro-

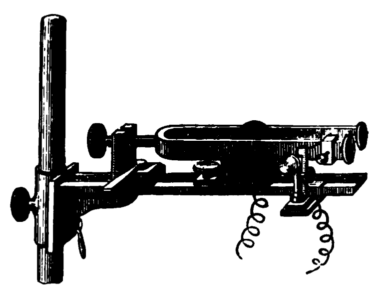


Fig. 110

diapason de M. Mercadier. Dans cet emploi de l'électricité à l'entretien des oscillations d'un diapason [1], il est essentiel que l'amplitude du mouvement vibratoire, ordinairement assez considérable, reste constante pour que l'isochronisme soit assuré. En tous cas, il est prudent d'inscrire, en même temps que les vibrations du diapason, les secondes données par une horloge astronomique, à l'exemple de Regnault (346) : on a ainsi un contrôle permanent de la marche du diapason.

On peut remplacer le pendule d'une horloge par un diapason. Cette disposition, réalisée d'abord par Niaudet [2], a été reprise par M. Kœnig [3] en vue d'obtenir un diapason type dont la hauteur fût toujours exactement connue. Pour avoir cette hauteur, il suffit en effet de comparer l'*horloge à diapason* avec un chronomètre ordinaire. Supposons que, comme dans l'appareil de M. Kœnig, le diapason qui agit sur l'échappement de l'horloge et

(1) Il convient de remarquer que le dispositif électro-magnétique doit toute son efficacité à l'extra-courant, à tel point que le courant peut n'être fermé que pendant que la branche du diapason se rapproche de l'électro-aimant (Lippmann, *Bulletin des séances de la Société française de physique;* 1885; p. 25).

(2) Niaudet, C. R., LXIII, 991; 1866.

(3) Kœnig, *Wied. Ann.*, IX, 394; 1880; et *Quelques expériences*, 173.

en reçoit à chaque oscillation une légère impulsion, soit un ut_1 de 64 vibrations doubles ; si l'horloge retarde de 1ˢ dans l'espace de 1ʰ, c'est que le diapason bat $\frac{3599}{3600} \cdot 64 = 63^{vd},928$ par seconde. L'appareil est d'ailleurs muni des pièces nécessaires pour servir à lui comparer tel autre diapason que l'on voudra d'après la méthode de Lissajous (347).

382. Coexistence des mouvements longitudinaux et transversaux dans les verges. — Quand une verge horizontale vibre longitudinalement, le sable projeté sur sa face supérieure dessine des nodales auxquelles Savart [1] reconnut les caractères suivants : 1° elles sont beaucoup plus nombreuses que les nodales propres du mouvement longitudinal ; 2° le sable s'y porte en glissant sur la surface de la verge et non en sautant ; 3° elles alternent sur les deux faces opposées, de sorte que si l'on retourne la verge sens dessus dessous, le sable se dispose au milieu des espaces qu'il laissait libres précédemment.

En mesurant les distances de ces lignes, Savart prouva que l'écartement de deux nodales consécutives (placées sur deux faces opposées) est, dans la partie moyenne de la verge, indépendant de la largeur, et proportionnel à la racine carrée de l'épaisseur ainsi qu'à la racine carrée de la longueur.

Il en conclut que ces nodales sont dues à un mouvement transversal, synchrone du mouvement longitudinal. Les lois précédentes sont, en effet, d'accord avec cette hypothèse. Prenons par exemple la deuxième loi : le mouvement longitudinal est indépendant de l'épaisseur, tandis que le nombre des vibrations transversales lui est proportionnel : donc, pour que le synchronisme persiste, il faut que le carré de la longueur de l'internœud, carré auquel est inversement proportionnel le nombre des vibrations transversales, varie en raison directe de l'épaisseur.

A l'appui de son hypothèse, Savart montra que si l'on excitait transversalement la verge de façon à obtenir sur la face supérieure le système complet des nodales qui accompagnaient sur les deux

(1) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXV, 337 ; 1837.

faces le mouvement longitudinal, elle rendait en effet très sensiblement le même son que dans le premier cas.

Une verge rectangulaire plongeant par la tranche dans du mercure sur moitié de sa longueur, il ébranla longitudinalement l'autre moitié : il vit alors à la surface du mercure une multitude de rides transversales, séparées par des points de repos qui coïncidaient avec les nœuds des deux faces à la fois; par conséquent, la longueur des segments vibrant transversalement est bien égale à la moitié de la distance de deux lignes nodales sur l'une des faces.

Après avoir ainsi déterminé les conditions du phénomène, Savart entreprit de l'expliquer; mais là il fut moins heureux. Les premières idées exactes sur ce point furent émises par A. Seebeck (1) : M. Terquem (2) les reprit et les développa.

M. Terquem établit d'abord que, quand les nodales de Savart ne se présentent pas d'elles-mêmes sur une verge vibrant longitudinalement, il suffit de diminuer graduellement et toujours très peu la longueur de cette verge pour les faire apparaître. En effet, cette diminution altère à peine le son longitudinal (3) et fait au contraire monter rapidement les sons transversaux, de sorte que bientôt l'un de ces sons se trouve sensiblement à l'unisson du son longitudinal. Telle est précisément la condition pour que le phénomène se manifeste.

Admettons que des vibrations longitudinales et des vibrations transversales se produisent alors simultanément, et cherchons le résultat de la coexistence de ces deux mouvements synchrones perpendiculaires. Soit en ABA'B' une coupe longitudinale de la verge : AB est la face supérieure, A'B' la face inférieure. La verge vibrant longitudinalement de façon à rendre le son fondamental, soit NN' un nœud transversal quelconque ne coïncidant pas avec le milieu de la verge. A un instant quelconque deux molécules m et m_1, situées de part et d'autre de NN', éprouveront longitudinalement des déplacements de même sens ml, m_1l_1, et transversalement des déplacements de sens contraire mt, m_1t_1', donnant les déplace-

(1) A. Seebeck, *Dove's Repertorium*, VIII, 53; 1849.

(2) Terquem, *Vibrations longitudinales des verges prismatiques* (thèse). Paris, Mallet-Bachelier; 1859.

(3) Il n'est question ici que du son fondamental; mais tout ce que nous disons conviendrait à un harmonique longitudinal quelconque.

ments résultants mr, $m_1r'_1$; une demi-période après, les déplacements résultants seront mr', m_1r_1. Les deux molécules m, m_1 oscilleront donc suivant les droites rr', $r_1'r_1$. Il en sera de même des molécules superficielles M, M_1 ; du sable (ou mieux du sulfate de baryte passé au tamis de soie) placé en ces points sera lan-

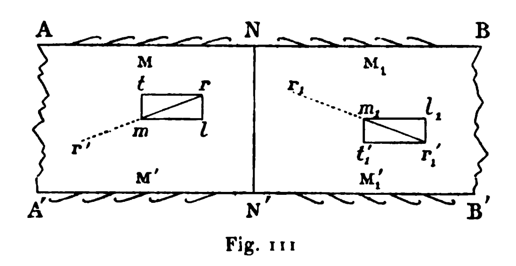


Fig. 111

cé vers N lorsque les molécules M, M_1 marcheront elles-mêmes vers N en se soulevant, et il restera en repos quand elles s'abaisseront. Comme les trajectoires des molécules sont très peu inclinées sur l'horizon, le mouvement horizontal étant beaucoup plus intense que le mouvement transversal, c'est par une sorte de glissement que le sable se portera vers N. Un glissement inverse l'éloignera de N'. La moitié des nœuds se trouveront ainsi dessinés sur l'une des faces, les autres se marqueront sur l'autre face dans les intervalles des premiers.

Il existe d'ailleurs deux modes de disposition des nœuds, suivant que le son transversal à l'unisson du son longitudinal correspond à

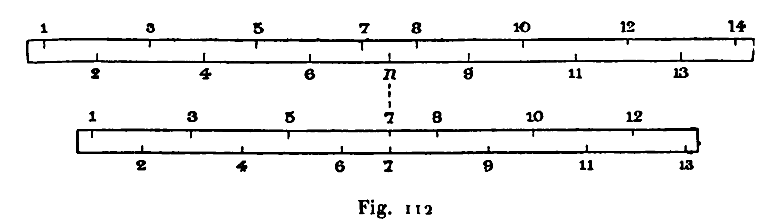


Fig. 112

un nombre pair ou impair de nœuds. Les deux figures ci-contre montrent ces deux modes différents, tels qu'ils se sont présentés à M. Terquem, le premier avec 14 nœuds sur une verge de laiton de 6^{mm} environ d'épaisseur et de 1^{m} de longueur [1], le deuxième

[1] Dans ce cas on peut aussi avoir, au lieu du nœud médian n, les deux nœuds 7 et 8, ce qui donne alors sur une même face quatre nœuds consécutifs 6,7,8,9.

avec 13 nœuds sur la même verge réduite à 857^{mm} de longueur. M. Terquem a constaté dans les deux cas que la disposition des nœuds vérifiait les formules de Lissajous (377).

Inversement, l'ébranlement transversal amène le mouvement longitudinal lorsque les périodes sont assez voisines : les nœuds alternent également sur les deux faces, mais en sens inverse.

Un fait digne de remarque c'est que le mouvement ne persiste que pour un accord approché entre les deux vibrations à angle droit, et que tout ébranlement devient impossible quand le son longitudinal est rigoureusement d'accord avec un harmonique tranversal.

La coexistence des deux sortes de mouvements explique encore le *son rauque* de Savart, son que fait entendre une verge longue et mince ébranlée longitudinalement avec énergie, et qui est à l'octave grave du son longitudinal. C'est un son transversal qui ne se manifeste que si le mouvement transversal peut en effet donner un son sensiblement à l'octave grave du son longitudinal. Le mouvement du sable est alors assez complexe, chacune des molécules parcourant la courbe en 8 de Lissajous.

III. — VIBRATIONS TOURNANTES.

383. Vibrations tournantes. — Dans ce mode de vibrations, chaque molécule décrit un petit arc de cercle autour de l'axe de la verge. On les excite avec l'archet conduit perpendiculairement à l'axe. Du sable projeté à la surface de la verge accuse une nodale régnant sur toute la longueur, coupée par un certain nombre de transversales. Les nœuds transversaux sont produits par les changements de sens de la rotation : le sable y reste en équilibre, mais il ne s'y rend pas des points voisins. Au contraire, il s'accumule sur la nodale longitudinale, poussé par le mouvement des bords.

La verge peut d'ailleurs être libre aux deux extrémités, ou fixée aux deux extrémités, ou libre à l'une des extrémités et fixée à l'autre. Chladni [1] a trouvé que dans tous les cas la position des

[1] Chladni, *Neue Schriften der Berliner Gesellschafft naturforschender Freunde;* 1799; et *Traité d'acoustique*, p. 110.

nœuds transversaux et la marche des sons supérieurs étaient les mêmes que pour les vibrations longitudinales, sauf que le son était plus bas d'une quinte que dans le mouvement longitudinal correspondant. Wertheim [1] fixe l'intervalle à 1,63 pour une verge carrée ou cylindrique, et à un rapport variable suivant l'épaisseur et la largeur quand la verge est rectangulaire.

M. Terquem [2] a reconnu que, dans ce dernier cas, les vibrations tournantes peuvent coexister avec des vibrations longitudinales, la condition de la coexistence étant toujours que les deux modes différents de vibrations produisent sensiblement le même son. On observe encore une disposition alterne des nœuds, qui s'explique comme précédemment.

Enfin les vibrations tournantes coïncident souvent avec les vibrations transversales ordinaires : les nodales s'inclinent alors et finissent même par se changer en courbes continues parcourant la verge sur toute sa longueur.

Dans les tubes, ces différentes sortes de vibrations se superposent facilement et donnent naissance à des spirales longuement décrites par Savart [3].

(1) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), L, 258; 1857.
(2) Terquem, *loc. cit.*
(3) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LXV, 337; 1837.

CHAPITRE VIII

MEMBRANES ET PLAQUES

I. — MEMBRANES.

384. Membranes. — *Définition.* — En acoustique, on admet entre les membranes et les plaques la même différence qu'entre les cordes et les verges.

La membrane théorique est une *lame solide, infiniment mince et parfaitement flexible*, soumise en tous sens à une tension assez forte pour rester sensiblement constante dans les petites déformations de la lame.

Les vibrations transversales d'une membrane fixée par son contour ont été étudiées avec soin, théoriquement et expérimentalement.

Théorie. — Dans son mémoire sur le mouvement vibratoire des tambours, Euler (¹) donna le premier l'équation de la membrane vibrante, considérée comme un tissu de fils élastiques se croisant rectangulairement. Plus tard, Poisson (²) démontra rigoureusement cette équation

$$\frac{d^2w}{dt^2}=\frac{\mathrm{T}}{\mu}\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}\right),$$

où w désigne le déplacement infiniment petit d'un point (x,y,o) perpendiculairement à la surface supposée primitivement plane; T est la tension par unité de longueur (219), et μ la masse de la

(¹) EULER, *Novi commentarii Academiæ Petropolitanæ*, X, 343; 1797. Voir aussi RICCATI, *Saggi scient. e litter. dell' Accademia di Padova*, I, 414; 1786.

(²) POISSON, *Mémoires de l'Académie des sciences*, VIII; 1829.

membrane par unité de surface. Un raisonnement tout semblable à celui que nous avons fait relativement à la corde vibrante (372), et facilité d'ailleurs par la connaissance que l'on a déjà (220) de la composante normale de la tension, permettra d'établir immédiatement cette formule.

Poisson avait à peu près épuisé la question dans le cas d'une membrane rectangulaire [1], mais pour la membrane circulaire il s'était borné aux vibrations identiques suivant tous les rayons. Le grand travail de M. Kirchhoff [2] sur les plaques fournit de fait la solution du problème de la membrane circulaire, qui fut traité par Clebsch [3] d'une façon complète [4]. M. Mathieu [5] a donné la théorie de la membrane elliptique.

Expériences. — Dès 1826, Savart [6] étudiait empiriquement le phénomène d'après la méthode des figures sonores si heureusement appliquée aux plaques par Chladni. La membrane, fixée à un cadre rigide, était placée près d'un tuyau accordé deux ou trois octaves au-dessous du son fondamental de la membrane. Savart remarqua immédiatement la ressemblance des figures sonores d'une membrane avec celles d'une plaque de même forme; mais il crut observer que, contrairement à celles des plaques, ces figures passaient de l'une à l'autre d'une manière continue, la membrane répondant toujours au son du tuyau dont il faisait varier graduellement la hauteur à l'aide d'un piston.

Membranes carrées.

MM. Bourget et Bernard [7] ont repris le travail de Savart sur les membranes carrées, en s'efforçant d'égaliser leur tension en tous sens, et en excitant chacune d'elles au moyen d'un tuyau

[1] Lamé, dans ses *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, simplifia la méthode et l'appliqua à la membrane carrée et à la membrane triangulaire équilatérale.

[2] Kirchhoff, *Crelle's Journal*, XL, 51; 1850.

[3] Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*. Carlsruhe; 1862. (Traduction française par de Saint-Venant et Flamant. Paris, Dunod; 1883.)

[4] Bourget a exposé dans les *Annales de l'École normale*, (1), III, 55; 1866, la théorie des membranes circulaires, avec tableaux numériques détaillés.

[5] Mathieu, *Journal de Liouville*, (2), XIII; 1868; et *Cours de physique mathématique*, p. 122.

[6] Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXII, 384; 1826.

[7] Bourget et Bernard, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LX, 449; 1860.

d'orgue accordé au moins une octave plus haut que le son fondamental de la membrane. Le papier est le corps qui leur a fourni les meilleurs résultats ; il suffit de le mouiller plus ou moins avant de le coller sur les bords du cadre pour obtenir une tension plus ou moins forte. On reconnaît d'ailleurs sans peine quand cette tension est uniforme : supposons que, sous l'action d'un tuyau convenable, la membrane offre le système de nodales composé de cinq parallèles à l'un des couples de côtés ; si la tension est la même dans les deux sens, le plus léger changement dans la position de la membrane au-dessus du tuyau amènera le système parallèle à l'autre couple de côtés ; chacune des figures sera très instable, et la membrane vibrera alternativement suivant l'un ou l'autre mode. Le sable se réunira alors en petits monticules aux

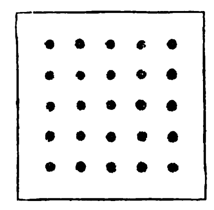


Fig. 113

points qui restent immobiles dans les deux cas : l'apparition de ces petits tas disposés en quadrillage régulier indiquera donc une tension uniforme.

D'après la théorie, à chacun des sons possibles correspondent une infinité de formes des nodales, telles que l'on peut passer de l'une à l'autre par des déformations continues, en variant le mode d'ébranlement sans changer le son. Le type le plus simple de chaque système est constitué par des parallèles aux côtés : on le représente par la notation h/k, dans laquelle h et k désignent le nombre de droites respectivement parallèles aux deux couples de côtés [1]. MM. Bourget et Bernard ont reconnu qu'effectivement les figures sonores des membranes rectangulaires doivent être classées par types formés de parallèles aux côtés, ainsi que Chladni

[1] Les systèmes (1/1), (2/2), (3/3), ... (h/h) ne sont susceptibles que d'une seule forme.

l'avait indiqué pour les plaques. La figure 114 montre quelques-unes des formes du type 1/0.

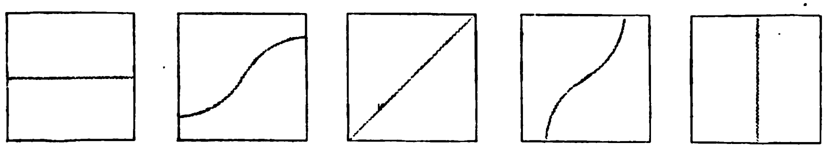


Fig. 114

Conformément aux idées de Chladni et contrairement à l'opinion de Savart, ils ont trouvé ces types nettement séparés les uns des autres. Cette séparation est très marquée pour les premiers sons. Que l'on prenne un tuyau donnant le son fondamental de la membrane (son que l'on obtient aisément en la frappant avec un petit marteau), et que l'on allonge ce tuyau, au moyen d'un ajutage mobile, de manière à en abaisser suffisamment le son, le sable de la membrane reste immobile ; si l'on raccourcit peu à peu le tuyau, le son s'élève à l'unisson de la membrane : alors le sable saute énergiquement en même temps que le son du tuyau est renforcé. Si l'on continue à diminuer la longueur du tuyau, le son monte de plus en plus et le sable ne tarde pas à revenir au repos [1]. Puis apparaît la nodale 1/0, correspondant au premier son supérieur; et ainsi de suite. Il faut remarquer toutefois que pour chaque figure il existe un certain intervalle (qui peut aller jusqu'à deux tons pour le son fondamental) dans lequel la membrane vibre plus ou moins bien; de sorte que, pratiquement, dès la troisième octave, où les sons propres de la membrane sont déjà très rapprochés (voir le tableau ci-dessous), on peut dire avec Savart que la membrane répond à tous les sons, le passage d'une figure à l'autre s'effectuant par un léger trouble, seul indice de la discontinuité.

Si l'on prend pour unité le nombre des vibrations du son fondamental, les nombres ci-après définissent, suivant Poisson, tous les

[1] On peut renverser l'expérience, prendre un tuyau à un ton plus élevé que la membrane, chauffer celle-ci de manière à lui donner momentanément une tonalité supérieure à celle du tuyau : placée au-dessus de l'orifice, elle reste immobile. Mais en se refroidissant elle arrive à l'unisson. Le sable s'agite alors vivement; puis il retombe au repos, la membrane étant maintenant à un ton plus grave que le tuyau.

sons que la membrane peut rendre : on a mis en regard, d'un côté la nodale, de l'autre la désignation musicale du son correspondant, le son fondamental étant représenté par ut_1.

Nodales.	Sons correspondants.		Nodales.	Sons correspondants.	
0/0	1	ut_1	3/3	4	ut_3
1/0	1,581	sol_1 ♯	4/2	4,123	$ut_3 +$
1/1	2	ut_2	5/0	4,301	ut_3 ♯ +
2/0	2,236	$ré_2 —$	5/1	4,472	$ré_3 —$
2/1	2,550	$mi_2 +$	4/3	4,528	$ré_3 +$
3/0	2,915	$sol_2 —$	5/2	4,743	$ré_3$ ♯ —
2/2	3	sol_2	6/0 = 4/4	5	mi_3
3/1	3,161	sol_2 ♯ —	5/3	5,099	$mi_3 +$
3/2	3,536	la_2 ♯ —	6/1	5,147	$mi_3 +$
4/0	3,606	la_2 ♯ +	6/2	5,385	$fa_3 +$
4/1	3,808	si_2	.	.	.

L'expérience ne donne pas exactement ces hauteurs des sons successifs. L'écart est plus considérable pour les premiers sons. Il est moins marqué avec les papiers forts. Cela tient sans doute à ce que, comme le pense lord Rayleigh, la cause perturbatrice principale est la résistance de l'air.

Membranes circulaires.

M. Bourget (¹) a aussi étudié les membranes circulaires, et il est arrivé à des conclusions toutes semblables à celles que nous venons de rapporter pour les membranes carrées.

Les lignes nodales sont ou des cercles, ou des diamètres faisant entre eux des angles égaux, ou des combinaisons de cercles et de diamètres également inclinés, conformément à la théorie. Elles sont parfaitement régulières quand la membrane est bien tendue, et présentent exactement les dimensions théoriques, autant du moins que l'épaisseur des lignes permet de le constater.

Le tableau suivant, extrait du mémoire de M. Bourget, contient les nodales les plus simples et les sons théoriques correspondants (les sons observés ont présenté des écarts du même ordre que dans le cas des membranes carrées).

(¹) Bourget, *loc. cit.*

	0 DIAMÈTRE.		1 DIAMÈTRE.		2 DIAMÈTRES.		3 DIAMÈTRES.		4 DIAMÈTRES.	
	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants	RAYONS des cercles nodaux.	SONS correspondants
0 CERCLE..		1,000 ut_1		1,594 sol_1 # —		2,136 ut_2 #		2,653 fa_2 —		3,156 sol_2 # —
1 CERCLE..	0,436	2,296 $ré_2$ +	0,546	2,918 sol_2 —	0,610	3,501 la_2 # —	0,654	4,060 ut_3 +	0,686	4,602 $ré_3$ +
2 CERCLES.	0,278 0,638	3,600 la_2 # +	0,377 0,690	4,231 ut_3 #	0,442 0,724	4,833 $ré_3$ # +	0,490 0,750	5,414 fa_3 +	0,528 0,770	5,979 sol_3 —
3 CERCLES.	0,204 0,468 0,734	4,905 mi_3 —	0,288 0,527 0,764	5,542 fa_3 # —	0,348 0,569 0,785	6,155 sol_3 # —	0,393 0,602 0,802	6,748 la_3 +	0,431 0,627 0,816	7,328 la_3 # —
4 CERCLES.	0,161 0,370 0,580 0,790	6,211 sol_3 # —	0,233 0,426 0,618 0,809	6,851 la_3 +	0,287 0,469 0,647 0,824	7,471 si_3 —	0,329 0,503 0,671 0,836	8,074 ut_4 +	0,364 0,531 0,691 0,846	8,663 ut_4 # +

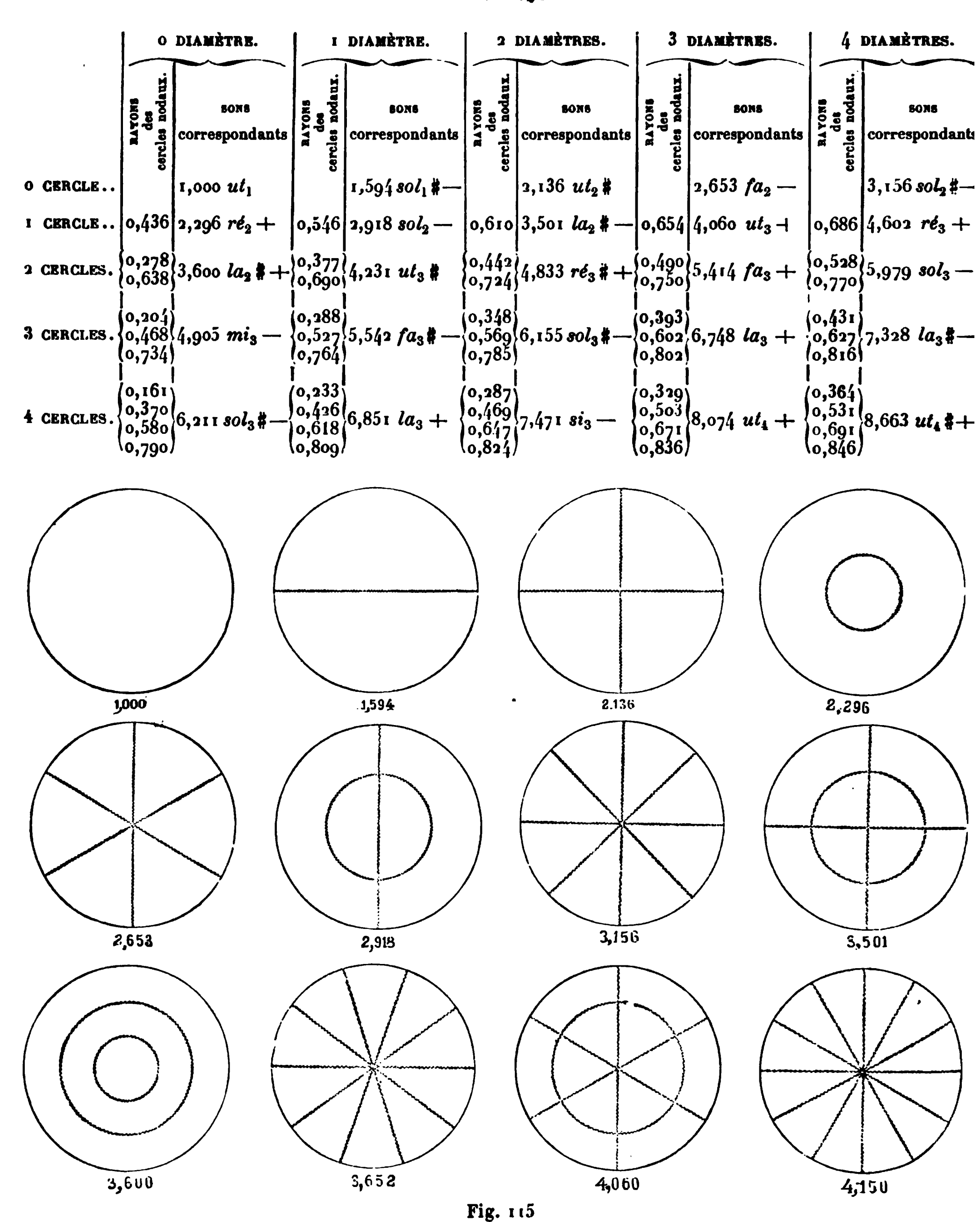


Fig. 115

Applications. — Les membranes sont utilisées en musique (*tam-*

bours, *timbales* et autres instruments à percussion du même genre). L'appareil musical de la cigale est un véritable tambour à deux peaux sèches et convexes, dont l'insecte joue par la contraction brusque et simultanée de deux gros muscles allant du centre de l'instrument à chacune de ces timbales [1]. Dans l'oreille humaine les vibrations extérieures sont reçues d'abord par une membrane (*membrane du tympan*), qui paraît apte à vibrer à l'unisson d'un son quelconque ; mais il faut remarquer que, grâce à la chaîne des osselets, sa tension peut varier dans de larges limites. Le physicien utilise constamment les membranes pour recueillir les sons : nous nous contenterons de rappeler le phonautoscope de Scott (331) et les appareils récepteurs de Regnault (346).

II. — PLAQUES.

385. Étude expérimentale des vibrations transversales des plaques. — *Difficultés de la question.* — D'une plaque de verre ou de métal on peut tirer une infinité de sons aux tonalités compliquées, décelant une non moins grande complication dans les mouvements vibratoires dont la plaque est susceptible.

Chladni [2] le premier éclaira ce dédale ; et, par ses ingénieuses *figures sonores*, il montra les divers modes de division d'une plaque. Napoléon, ayant été témoin de ses expériences, en fut tellement frappé qu'il fit mettre au concours par l'Institut la théorie de ces curieux phénomènes ; Sophie Germain [3] aborda la question par un procédé évidemment heureux puisque Lagrange [4], en l'appliquant correctement, trouva l'équation

$$\frac{d^4w}{dx^4}+2\frac{d^4w}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}=F(x,y),$$

qui donne les déplacements verticaux w de tous les points du feuillet moyen de la plaque mince.

La démonstration de cette équation du quatrième ordre a exercé

(1) Carlet, *Ann. des sc. nat.* ; 1877.

(2) Chladni, *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Leipzig, 1787 ; et *Traité d'acoustique*, 120.

(3) Sophie Germain, *Mémoires de l'Institut*, 1810.

(4) Lagrange obtint cette équation en 1811, mais il ne la publia point ; on la trouva dans ses papiers, sans démonstration, en 1813.

les mathématiciens les plus éminents, Poisson ([1]) d'abord, de nouveau Poisson ([2]) et simultanément Cauchy ([3]), ensuite M. Kirchhoff ([4]), son élève M. Gehring ([5]), et Clebsch ([6]), puis M. Boussinesq ([7]); mais l'exactitude même de l'équation n'a jamais été contestée, tandis que les conditions au contour ont soulevé de vives discussions. D'après Poisson, trois équations distinctes doivent être vérifiées en chaque point libre du contour. M. Kirchhoff a montré que généralement il était impossible de satisfaire à ces trois équations en même temps : toutefois, dans le cas des vibrations symétriques d'une plaque circulaire, l'une des équations se réduit à une identité, de sorte que les conclusions de Poisson relativement à ces vibrations sont justes; mais il n'y a vraiment que deux équations au contour. Cette manière de voir n'a pas été admise sans résistance : M. Mathieu ([8]) et M. Maurice Lévy ([9]) ont contesté l'exactitude des raisonnements de M. Kirchhoff; néanmoins, l'opinion de ce dernier a prévalu.

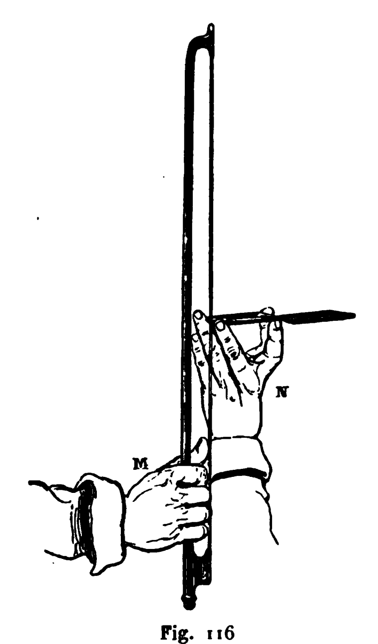


Fig. 116

Dispositions expérimentales. — Pour étudier expérimentalement les vibrations transversales d'une plaque, on la soutient soit entre deux cônes de liège fixés aux mâchoires d'une pince spéciale, dite *pince à plaques*, soit entre les doigts si la plaque n'est pas trop lourde, ou, ce qui est moins bon, on l'attache sur un support au moyen d'un clou à vis,

([1]) Poisson, *Mémoires de la 1re classe de l'Institut* pour l'année 1812.
([2]) Poisson, *Mémoires de l'Académie des sciences*, VIII; 1829.
([3]) Cauchy, *Exercices de mathématiques*, III, 328; 1829.
([4]) Kirchhoff, *loc. cit.*
([5]) Gehring, *De æquationibus differentialibus quibus æquilibrium et motus laminæ cristallinæ definiuntur* (Dissertation inaugurale). Berlin; 1852.
([6]) Clebsch, *loc. cit.*
([7]) Boussinesq, *Journal de Liouville*, (2), XVI, 125; et (3), V, 163 et 329; 1871-79.
([8]) Mathieu, *Journal de Liouville*, (2), XIV, 241; 1869.
([9]) Maurice Lévy, *Journal de Liouville*, (3), III, 219; 1877.

comme les différentes pièces du *banc à plaques* représenté ici. On répand un peu de sable d'écolier à la surface, et on at-

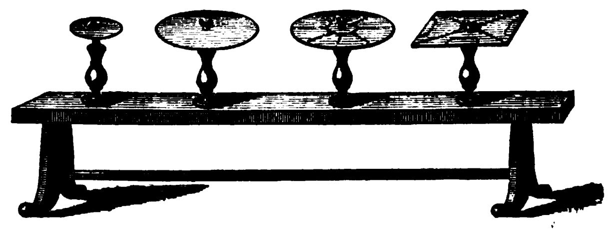


Fig. 117

taque le bord de champ avec l'archet, en choisissant le point d'attaque, en immobilisant au besoin quelque autre point sur lequel on pose le doigt, de façon à obtenir la figure sonore que l'on désire.

Figures sonores. — A chaque mode de vibrations de la plaque correspond une figure déterminée qui, sous un archet habile, apparaît avec une soudaineté et une netteté surprenantes (¹). C'est plaisir de voir les figures se succéder dans une variété inépuisable, *une figure donnée amenant toujours le même son;* mais la réciproque n'est pas vraie, *un même son répondant en général à différentes figures.* Nous indiquerons quelques-unes des formes les plus remarquables.

Plaques carrées.

Règles de Chladni. — Sur une plaque carrée ou rectangulaire Chladni, comme nous l'avons déjà dit, ramène toutes les figures à des systèmes de parallèles aux côtés, les *distorsions* des lignes primitives pouvant offrir les dessins les plus variés, sans modifier le son qui reste le même pour toutes les figures du même type. Nous dénommerons encore les figures par les nombres de parallèles aux côtés constituant le type.

(¹) Chladni recommande d'employer l'archet dans toute sa longueur, et, à la fin, après avoir renforcé un peu le mouvement, de retirer brusquement l'archet, afin de laisser la plaque vibrer *librement.* Pour les figures simples correspondant aux sons graves, il faut plus de pression et une marche plus lente de l'archet que pour les figures compliquées relatives aux sons aigus.

De tous les modes de vibrations, 1/1 est celui qui produit le son le plus grave (que nous appellerons ut_1) : on l'obtient facilement en fixant la plaque par le milieu et en l'attaquant près d'un angle.

La plaque étant toujours saisie au milieu, si l'on appuie un doigt à l'un des sommets et qu'on passe l'archet au milieu d'un des côtés adjacents, on obtient le deuxième son, qui est la quinte, $sol_1 = \frac{3}{2}$; et la figure correspondante se compose des deux diagonales, ou plutôt de deux courbes asymptotes à ces diagonales, que Chladni regarde comme une distorsion de 2/0. Au même type 2/0 se ramène, d'après lui, le carré aux angles arrondis qui se montre quand, serrant la plaque au milieu d'un côté, on la met en mouvement à l'un des angles les plus proches; cependant le son que donne alors la plaque, $la_1\sharp$, est plus aigu que le précédent de près d'une tierce mineure.

Au troisième son, tierce de l'octave $mi_2 = \frac{5}{2}$, répond le système 2/1, qui apparaît très facilement si, la plaque étant prise à l'intersection de deux lignes, on l'attaque au milieu de l'un des côtés. Un petit changement des doigts peut amener la distorsion en trois courbes diagonales.

Selon Chladni, 3/0 est le système le plus convenable pour montrer les distorsions qui se produisent sans changement du son. En avançant progressivement les doigts *d* et l'archet *a*, on passe du système de trois droites parallèles (qui n'est autre que celui d'une verge rendant le deuxième son transversal [1]) aux figures ci-jointes, et en continuant le mouvement des doigts, on arriverait par les mêmes figures intermédiaires au système de trois droites parallèles à l'autre côté. Pendant toutes ces distorsions, chaque partie vibrante conservant toujours la même grandeur relative, le son ne change pas : ce son, le quatrième de la série, est à peu près la double octave, $ut_3 = 4$, du son fondamental.

On a encore représenté dans la planche 118 quelques-unes des formes les plus faciles à obtenir, telles que 4/2 ($sol_4\flat = 11{,}5$ et $sol_4 = 12$), ou les plus curieuses. Cette planche n'est pas la simple

[1] Voir la note de la page 235.

reproduction de celle de Chladni : en la dessinant on a tenu compte des observations de Strehlke ([1]) et de Savart ([2]) et surtout des plan-

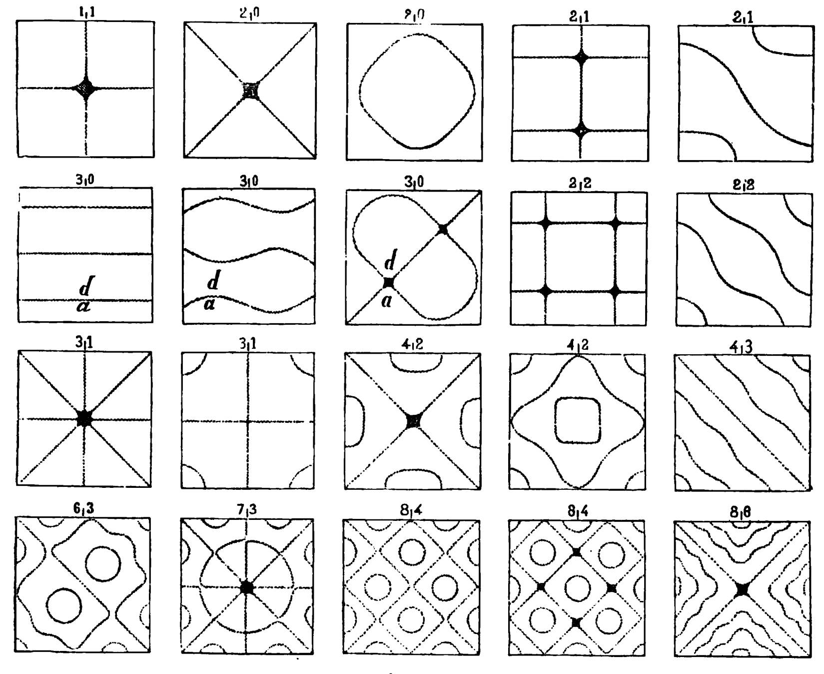


Fig. 118

ches de Savart qui, substituant au sable le tournesol gommé, a pu imprimer des centaines de figures sonores.

Observations de Strehlke et de Savart. — D'après ces deux physiciens, les types de Chladni sont des limites dont les nodales se rapprochent sans les atteindre : une nodale ne se montre jamais entièrement droite ; deux nodales ne se coupent jamais (à moins que l'on ne mette trop de sable sur la plaque).

Savart rapporte cependant chaque figure à un canevas formé de parallèles aux côtés et de diagonales : il admet que toutes les figures sonores des plaques carrées sont composées de parallèles aux côtés, toujours en nombre égal pour les deux sens ([3]), et de parallèles

([1]) Strehlke, *Pogg. Ann.*, IV, 205 ; 1825.
([2]) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LXIII, 225 ; 1840.
([3]) On ne trouve pas dans ses planches les figures telles que notre première 2/1 donnée par Chladni et reproduite par Strehlke sous les réserves indiquées.

aux diagonales, en nombre égal ou inégal pour les deux sens. Il classe en conséquence les figures tout autrement que Chladni.

Ces classifications ont au fond peu d'importance. Des mesures, comme celles en trop petit nombre dont nous parlerons dans un instant, seraient beaucoup plus utiles. Seules elles pourraient permettre une comparaison certaine avec la théorie.

Essais de théorie. — Celle-ci est malheureusement très peu avancée pour le cas d'une plaque carrée à bords libres. Lord Rayleigh [1] a effectué le calcul dans l'hypothèse de $\sigma = 0$, σ désignant toujours le coefficient de Poisson (242). Il trouve ainsi le système des deux diagonales, le carré arrondi 2/0, la courbe en rectangle barré par une diagonale 2/0, etc. Il a déterminé pour le carré arrondi les valeurs théoriques du rayon vecteur parallèle au côté $r_c = 0,4154$ et du rayon vecteur diagonal $r_d = 0,3900$, le demi-côté du carré étant pris égal à 0,5000. Or Strehlke a obtenu, sur trois plaques de verre soigneusement choisies, pour r_c les valeurs 0,4198, 0,4198, 0,4200 et pour r_d les valeurs 0,3856, 0,3855, 0,3864 [2]. L'accord est certainement plus satisfaisant qu'on ne pouvait l'espérer en partant d'une hypothèse si éloignée des faits (on sait que pour le verre $\sigma = \frac{1}{4}$).

Il importe d'ailleurs de remarquer que les figures réelles sont nécessairement altérées par les irrégularités inévitables de la plaque (irrégularités d'autant plus sensibles que la plaque est plus mince), par le mode imparfait de support, et par l'action de l'archet qui n'est pas négligeable, les *vibrations forcées* pouvant différer beaucoup des *vibrations libres*.

Explication de Wheatstone. — Wheatstone [3] avait imaginé une explication des figures sonores qui mérite d'être rappelée. Considérons une verge, libre aux deux bouts, vibrant transversalement de manière à donner le son fondamental : elle offre alors

[1] Lord Rayleigh, *loc. cit.*, I, 309.

[2] D'après Strehlke, ce carré arrondi est bien représenté par l'équation en coordonnées polaires

$$r = 0,4016 + 0,0170 \cos 4\omega + 0,00128 \cos 8\omega.$$

[3] Wheatstone, *Phil. Trans.*, 1833, pars II, 593.

deux lignes nodales distantes des bouts de 0,224. La largeur de la verge étant indifférente dans certaines limites, nous la supposerons égale à la longueur : nous aurons ainsi une plaque carrée présentant deux nodales parallèles à l'un des systèmes de côtés ([1]). Prenons une deuxième plaque carrée identique à la première et animée d'un mouvement égal et contraire. Superposons les deux



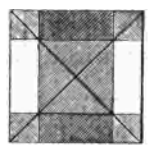


Fig. 119

plaques, ou, pour parler exactement, superposons les deux mouvements dans une même plaque, en les croisant à angle droit. Nous aurons un nouveau mode de mouvement vibratoire, caractérisé par un système de nodales passant par tous les points où les mouvements composants sont tous deux nuls ou s'annulent réciproquement. Nous obtiendrons ainsi dans le cas actuel le système des deux diagonales. Le principe de la superposition est juste, mais les mouvements que l'on superpose ne convenant pas en réalité aux plaques carrées à bords libres, les résultats ne seront qu'approximatifs. Ainsi, quand les mouvements des deux plaques croisées à angle droit sont concordants, Wheatstone trouve le carré inscrit, tandis que la forme réelle est le carré arrondi défini par Strehlke.

Sans nous attacher davantage aux défauts de la méthode, profitons des avantages qu'elle nous offre pour une première représentation des phénomènes. Elle va d'abord nous rendre compte de l'expérience suivante de Wheatstone sur les plaques de bois. Si une plaque de bois carrée est taillée de façon qu'un couple de côtés soit parallèle aux fibres, le son auquel correspondent deux nodales parallèles à cette direction est plus bas que le son

([1]) Ce passage de la verge à la plaque est incorrect, à cause de la courbure perpendiculairement au plan de flexion, que l'on ne peut plus négliger dès que la largeur devient comparable à la longueur.

accompagné des mêmes nodales perpendiculaires aux fibres (¹); on ne pourra donc pas observer sur cette plaque les deux diagonales croisées : mais on les verra apparaître si la dimension parallèle aux fibres est diminuée de manière que la plaque rende à très peu près le même son dans les deux sens. Une plaque de bois carrée offrira au contraire immédiatement le système des deux diagonales, si elle a les fibres en diagonale, ou si elle est formée par la superposition de deux plaques identiques taillées suivant les fibres et croisées à angle droit, le son fondamental étant alors le même dans les deux sens.

L'explication de Wheatstone s'étend aux plaques rectangulaires, comme le montre le tableau ci-contre, dans lequel M. Kœnig (²) a

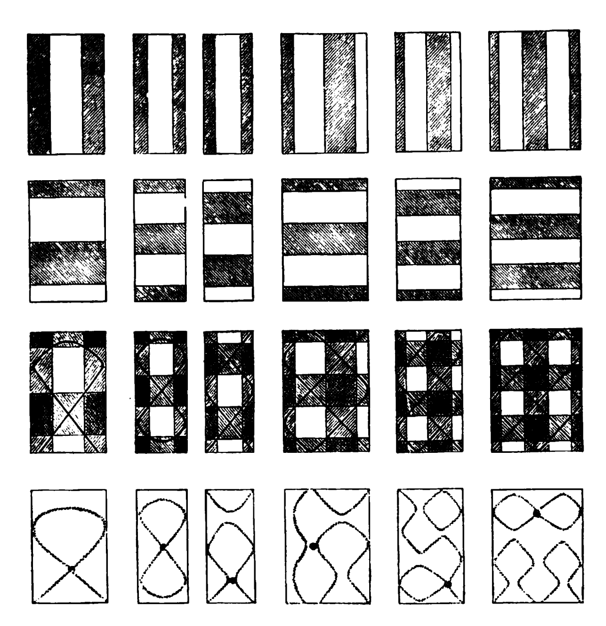


Fig. 120

représenté des plaques rectangulaires avec les divisions des verges dans le sens de leur longueur, les mêmes plaques divisées dans le sens de leur largeur, les figures résultant de la combinaison des deux

(¹) Le bois résiste beaucoup mieux à la flexion quand il est taillé parallèlement aux fibres, comme chacun sait.

(²) Kœnig, *Pogg. Ann.*, CXXII, 238; 1864; et *Quelques expériences*, 32.

systèmes orthogonaux, et enfin au-dessous les figures sonores réellement observées.

Remarques de M. Radau. — En étudiant l'explication de Wheatstone, M. Radau [1] a remarqué que l'équation de Lagrange admet comme solution particulière [2]

$$w = \left(\sin\frac{h\pi x}{l}\sin\frac{k\pi y}{l} \pm \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{h\pi y}{l}\right)\sin 2\pi(h^2+k^2)\frac{e}{l^2}mt.$$

La hauteur du son serait alors proportionnelle à $\frac{e}{l^2}(h^2+k^2)$, le coefficient de proportionnalité étant pour le laiton, d'après les nombres de Wertheim $\left(\sigma = \frac{1}{3},\ V = 3600^{m}\right)$, environ 173 200, de sorte que l'on aurait avec les plaques de laiton

$$N = 173\,200\,\frac{e}{l^2}(h^2+k^2),$$

formule que vérifie l'expérience. En outre, on obtiendrait l'équation des nodales en égalant à zéro la parenthèse, dans laquelle d'ailleurs les sinus peuvent être remplacés par des cosinus (ce qui revient à un déplacement de l'origine); et en effet la plupart des nodales des plaques carrées sont représentées par l'équation

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(hx)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(ky) \pm \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(kx)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(ky) = 0,$$

l'origine étant au centre de la figure; toutefois la représentation n'est pas parfaite : ainsi on a pour la courbe 2/0 le carré inscrit, comme Wheatstone. C'est qu'en effet les conditions aux limites ne sont encore pas satisfaites; et les solutions trouvées conviennent aux membranes carrées à bords libres normalement ou aux pla-

(1) RADAU, *Moniteur scientifique de Quesneville*, VI, 468 et 540; 1864.

(2) Dans cette formule, l représente le côté du carré, e l'épaisseur (ces deux longueurs en centimètres), h et k sont des nombres entiers (marquant précisément le nombre de parallèles à chaque couple de côtés auxquelles on peut ramener la figure d'après Chladni), m est un coefficient dépendant du coefficient de Poisson σ et de la vitesse du son V dans le corps considéré.

ques carrées à bords supportés, mais non aux plaques carrées à bords libres [1].

Plaques circulaires.

Accord de l'expérience et de la théorie. — On a pu au contraire établir d'une façon complète la théorie des plaques circulaires à bords libres, fixer analytiquement la forme des nodales, qui sont des diamètres ou des cercles concentriques, et calculer la série des sons possibles.

Pour expérimenter, on saisit la plaque dans la pince à plaques ou entre les doigts, ou on la pose sur des pointes en liège, ou bien on

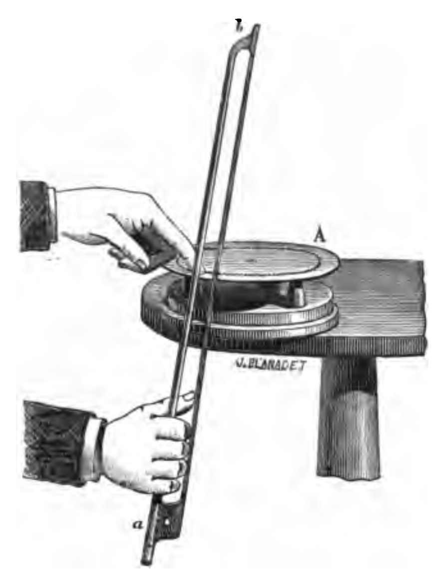


Fig. 121

la fixe sur un support par son centre (la figure sonore présente alors nécessairement des diamètres); et on l'attaque soit avec l'archet en un point du contour, soit avec des crins passant par un trou ménagé au centre. On peut aussi attacher la plaque à l'extrémité d'une verge de longueur convenable que l'on fait vibrer longitudinalement, comme le montre la figure 127 [2]; le mouvement de la

[1] Voir lord Rayleigh, *loc. cit.*, 307 et 314.

[2] Le procédé est applicable aux plaques d'air (Kundt, *Pogg. Ann.*, CXXXVII, 456; 1869).

verge se communique à la plaque dans laquelle il se trouve transversal (cette disposition est particulièrement commode pour obte-



Fig. 122

nir les figures formées exclusivement de cercles). Dans tous les cas,



Fig. 123

il suffit de projeter du sable à la surface de la plaque pour manifester les nodales. Ces nodales coïncident en général d'une manière

très étroite avec les cercles et les diamètres de la théorie (¹).

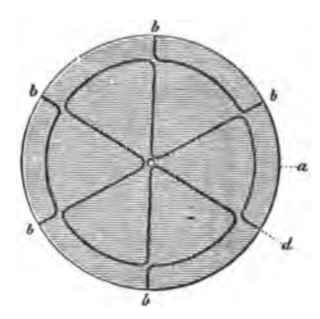


Fig. 124

Poisson a déterminé les rayons des cercles des figures sonores dépourvues de diamètres ; et Strehlke (²) a mesuré soigneusement quelques-uns de ces rayons sur une plaque de verre parfaitement travaillée. Voici les nombres obtenus, le rayon de la plaque vibrante étant pris pour unité.

	Calcul.	Observation.
1 cercle	0,6806	0,6782
2 cercles	0,3915	0,3913
	0,8420	0,8415
3 cercles	0,2568	0,2563
	0,5915	0,5911
	0,8938	0,8936

(¹) En fixant certains points de la circonférence au moyen de bouchons convenablement placés, et en ébranlant la plaque par le centre, on obtient des figures à festons, connues depuis Chladni, mais dont la théorie n'a pas encore

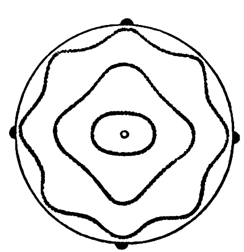


Fig. 125

été donnée : en même temps que ces festons apparaissent, le son monte sensiblement dans les premiers degrés, comme l'a constaté Wertheim, qui a remarqué en outre que ces figures ne se forment bien que sur les plaques de laiton (WERTHEIM, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXI, 19; 1851).

(²) STREHLKE, *Pogg. Ann.*, XCV, 577; 1855.

Strehlke a encore vérifié sur d'autres disques, moins bons, quelques-uns des résultats de la théorie de M. Kirchhoff :

	Calcul.	Observation.			
1 diamètre, 1 cercle.....	0,7814	0,781	0,783	0,781	0,783
2 diamètres, 1 cercle.....	0,8219	0,790	0,810	0,820	
3 diamètres, 1 cercle.....	0,8452	0,838	0,842		
1 diamètre, 2 cercles....	0,8706	0,869	0,869		
	0,4977	0,488	0,492		

Relativement à la hauteur, la théorie confirme la loi posée par Chladni :

Sauf pour les sons répondant aux figures formées exclusivement de diamètres (¹), *le nombre des vibrations est proportionnel à* $(d+2c)^2$, d étant le nombre des diamètres et c le nombre des cercles de la figure sonore correspondant au son considéré (²).

Si l'on représente par ut_1 le son le plus grave (2 diamètres, 0 cercle), la théorie donne pour les figures formées de 1 cercle avec 0 diamètre $sol_1\sharp +$, avec 1 diamètre $si_2 -$, avec 2 diamètres $sol_3\sharp +$, avec 3 diamètres $ré_4\sharp +$,..., toutes valeurs extrêmement voisines de celles que Chladni avait trouvées expérimentalement.

Sur une plaque un peu grande, on observe fréquemment la production simultanée de plusieurs figures sonores, le bord de la

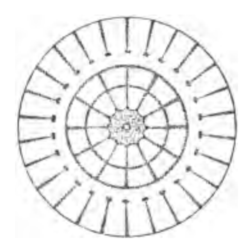


Fig. 126

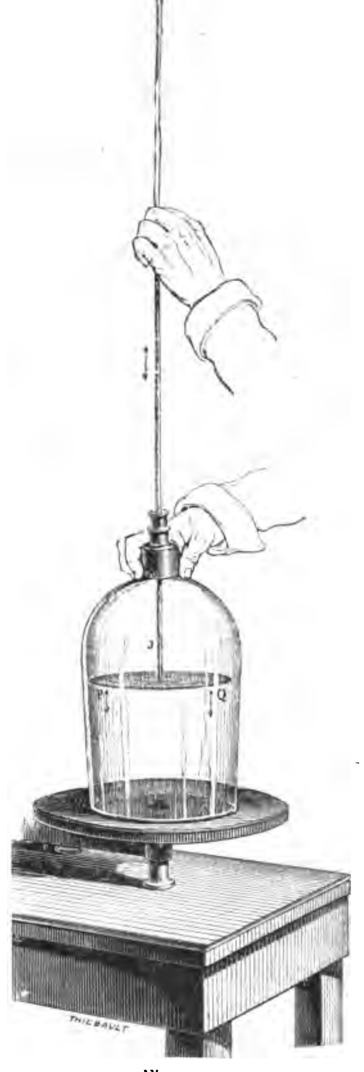
plaque se subdivisant en un plus grand nombre de parties que la portion centrale, ce qui correspond à la production simultanée de plusieurs sons (lesquels peuvent être à l'unisson).

Effet d'un défaut de symétrie, d'une surcharge. — Dans une plaque parfaitement homogène, la position des nodales diamétrales est

(¹) Ces sons forment une série très simple 2^2, 3^2, 4^2, ... (le nombre des diamètres étant 2, 3, 4, ...), mais complètement séparée des autres.

(²) Dans l'influence de la subdivision de la plaque sur la hauteur du son, un diamètre vaut deux cercles.

complètement arbitraire, et ne dépend que du point d'attaque. Mais quand il y a un défaut de symétrie, la figure sonore n'est stable que pour deux positions dérivant l'une de l'autre par rotation de la moitié de l'angle compris entre deux diamètres adjacents du groupe. Et encore le défaut de symétrie ne doit-il pas être trop considérable, sinon la figure sonore ne serait plus du tout composée de cercles et de diamètres.


Fig. 127

Si l'on ajoute à la plaque une petite surcharge (en dehors d'une nodale circulaire), l'un des systèmes diamétraux passe par le point d'application de la surcharge, et la période de ce système n'est pas modifiée; la période de l'autre s'accroît.

Figures tracées par le lycopode. — Avec une poussière très légère, telle que la poudre de lycopode, les figures sonores offrent un aspect tout différent : on voit s'accumuler sur les ventres des amas de poudre en mouvement. Faraday a montré que ce phénomène, déjà connu de Chladni, est dû à de petits tourbillons d'air qui prennent naissance au-dessus des ventres, et auxquels on peut faire soutenir une mince feuille d'or à plusieurs millimètres de hauteur. Dans le vide les amas ventraux disparaissent, et toute la poussière se place sur les nodales.

En expérimentant avec la poudre de lycopode, Savart a vu la figure, oscillant entre ses deux positions d'équilibre, dépasser l'une d'elles sous l'action répétée de l'archet et prendre un mouvement continu de rotation en formant

une sorte de nuage annulaire. Il convient d'employer une plaque mince et large, rendant un son d'ordre élevé. On peut même, à l'exemple de Savart, supprimer le lycopode, et faire tomber sur la plaque un faisceau de lumière qui dessine une étoile tournant si rapidement que bientôt on ne distingue plus qu'un cercle lumineux.

Expériences de Chladni et de Savart. — Chladni et Savart ont encore étudié les plaques polygonales et elliptiques : dans ces dernières les figures sonores se composent essentiellement d'ellipses et d'hyperboles homofocales.

Lois de Chladni. — En tous cas, la matière, la forme et le mode de vibration (caractérisé par la figure sonore) étant les mêmes, *le son d'une plaque homogène est en raison directe de l'épaisseur et en raison inverse de la surface.*

Si la matière est différente, le son est *en raison directe de la racine carrée de la rigidité E et en raison inverse de la racine carrée du poids spécifique.*

Ces lois, énoncées pour la première fois par Chladni, sont des conséquences immédiates des principes de l'élasticité (387), et ont été confirmées par toutes les recherches ultérieures. On rapportera seulement ici les mesures récentes de M. Mercadier [1] sur les plaques circulaires : une plaque d'acier, supportée par trois bouchons de liège suivant trois points du cercle de diamètre 0,68, et par conséquent disposée pour émettre le deuxième son, était entretenue électriquement en vibration, et ses oscillations s'inscrivaient à côté de celles d'un diapason chronographique, comme dans les expériences sur les verges (378); la formule $N = K\frac{e}{d^2}$, où K est une constante, e l'épaisseur et d le diamètre de la plaque, s'est vérifiée très exactement dès que l'épaisseur de la plaque a été supérieure à 2 millimètres.

Applications. — Les disques circulaires conviennent bien pour étudier l'élasticité des corps solides, ainsi que l'a montré Wertheim [2].

Les vibrations transversales des plaques sont utilisées dans les *cymbales* et les *tam-tams*, que leur richesse en sons supérieurs rend particulièrement remarquables. Dans les *téléphones*, le disque mé-

(1) MERCADIER, *Journal de physique*, (2), IV, 541 ; 1885.

(2) WERTHEIM, *loc. cit.*

tallique est évidemment susceptible de vibrations déterminées par sa nature et sa forme, mais il est, en outre, capable d'une résonnance générale (401), en vertu de laquelle il peut transmettre tout mouvement vibratoire. C'est presque exclusivement cette dernière propriété qui est mise en jeu dans l'appareil [1]; la première, bien qu'elle ne se manifeste pas comme dans un disque *libre*, amène le renforcement de certains sons, renforcement fâcheux, car il a pour effet d'altérer le timbre. L'effet est d'autant moindre que l'épaisseur est plus faible et la surface plus grande, de sorte qu'une lame élastique large et mince constitue un bon récepteur pour tous les sons usuels. Tel est l'*audiphone* de M. Rhodes, de Chicago [2] : une plaque mince en caoutchouc durci, semblable à ces écrans que l'on tient à la main, et s'appliquant contre les dents de la mâchoire supérieure, reçoit les sons qui se propagent dans l'air et les transmet, par l'intermédiaire des os de

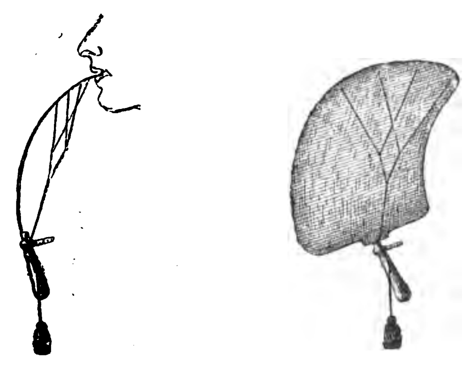


Fig. 128

la tête, jusqu'aux nerfs auditifs. Cet appareil, représenté figure 128 de profil et par derrière, et qui peut être réduit à une feuille de carton mince et flexible (carton à satiner) [3], paraît apte à rendre grand service aux sourds chez lesquels les nerfs de l'audition ne sont pas complètement atrophiés.

386. Timbres et cloches. — Aux disques circulaires se rattachent les timbres et les cloches. Tous ces instruments dans leurs

(1) Voir Mercadier, *Annales télégraphiques;* 1886, passim.
(2) Rhodes, *American patents;* 1879.
(3) Colladon, *La Nature*, VIIIe année, 1er semestre, 161; 1880.

vibrations se partagent en un nombre pair de segments séparés par des nodales méridiennes. Lorsqu'une cloche sonne sa note fondamentale, elle se divise en 4 segments égaux, séparés par 2 plans rectangulaires; le point où frappe le battant est toujours le milieu d'un segment. Les sons supérieurs correspondent à 6, 8, 10,... segments séparés par 3, 4, 5,... plans diamétraux. Pour rendre sensibles ces plans nodaux, on peut employer le pendule acoustique (324). On peut aussi remplir la cloche d'eau qui accuse les ventres par des rides se creusant à sa surface et, si l'amplitude est suffisante, par des gouttelettes lancées en tous sens. L'expérience se fait très

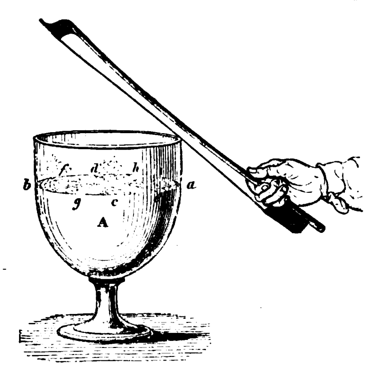


Fig. 129

bien avec une cloche de verre, ou même un simple verre à boire, que l'on excite à l'archet [1]. Au lieu d'eau, M. Melde emploie de l'éther ou de l'alcool : les gouttelettes se détachent plus facilement,

[1] En frottant circulairement le bord du verre avec un doigt mouillé d'eau,



Fig. 130

on obtient encore le partage en 4 parties vibrantes, mais la position de ces parties change à chaque instant.

et, une fois formées, elles roulent à la surface, sans se mêler au liquide, dans une sorte de caléfaction qui est favorisée par l'élévation de la température.

Les nodales d'une cloche parfaitement régulière sont stables et le son émis est toujours le même, quel que soit le point d'attaque. Mais toute irrégularité dans la matière ou dans la forme entraîne des perturbations analogues à celles des plaques. Chladni le montrait avec une tasse à thé ([1]), qu'il ébranlait de façon que l'anse se trouvât sur une ligne nodale ou sur un ventre : dans le premier cas, la surcharge ne gênait pas le mouvement, et le son était plus élevé que dans le deuxième. La plupart des cloches par défaut de symétrie sont ainsi susceptibles d'émettre deux sons distincts, dont la coexistence ([2]) produit des battements (388) que l'on entend surtout quand le son est près de s'éteindre.

Si une cloche était suffisamment régulière et avait partout la même épaisseur, la série des sons, correspondant à 2, 3, 4,... nodales méridiennes, serait 2^2, 3^2, 4^2,..., comme dans une plaque ronde divisée de la même manière. Mais, en pratique, la hauteur et l'intensité relative des différents sons dépendent de la forme adoptée par le fondeur ([3]). Ainsi, la grosse cloche du dôme d'Erfurth, fondue en 1477, donne, d'après M. von Helmholtz, les notes mi_1, mi_2, $sol_2\sharp$, si_2, mi_3, $sol_3\sharp$, si_3, $ut_4\sharp$, qui sont toutes harmoniques, sauf la dernière.

Quelle que soit la forme adoptée, la loi de similitude (387) permet d'obtenir facilement une série de cloches dont les sons fondamentaux soient entre eux dans des rapports voulus, et par conséquent de construire des *carillons* harmonieux.

387. Systèmes semblables ([4]). — Considérons deux systèmes

([1]) L'expérience réussit non moins bien avec une cruche de grès (Tyndall).

([2]) Les deux directions du maximum et du minimum de résistance à la déformation correspondent seules à des vibrations simples; dans toute autre direction il se produit deux sons.

([3]) M. Sax a construit pour l'Opéra, à l'occasion de *Patrie*, une cloche faite d'une simple feuille de laiton emboutie en forme de cornet à renflements superposés. Cette cloche qui ne pèse que 7 kilogrammes, donne, dans un espace fermé, un son imitant complètement celui d'une cloche de 7,000 kilogrammes à l'air libre.

([4]) CAUCHY, *Mémoires de l'Académie des sciences*, IX, 118; 1830.

semblables et semblablement constitués, γ étant le rapport des densités. Supposons que dans ces systèmes deux points semblablement placés, x, y, z et sx, sy, sx, soient animés de mouvements vibratoires tels qu'aux époques respectives t et αt les déplacements soient entre eux comme $1 : \delta$; le rapport des vitesses sera $\frac{\delta}{\alpha}$, et celui des accélérations $\frac{\delta}{\alpha^2}$. Les masses des deux parallélipipèdes élémentaires $dxdydz$ et $s^3dxdydz$ étant comme $1 : s^3\gamma$, le rapport des forces d'inertie est $\frac{s^3\gamma\delta}{\alpha^2}$. D'autre part, les forces réelles sont proportionnelles aux coefficients d'élasticité E, aux déplacements relatifs $\frac{\delta}{s}$ et aux surfaces des éléments s^2, par conséquent à $Es\delta$. On doit donc avoir

$$\frac{s^3\gamma\delta}{\alpha^2} = Es\delta,$$

ou, δ disparaissant,

$$\alpha^2 = s^2 \frac{\gamma}{E},$$

équation qui détermine le rapport des périodes α en fonction du rapport de similitude s ainsi que de la densité γ et du coefficient d'élasticité E (¹). Si au lieu de la période on préfère considérer le nombre des vibrations, la formule précédente s'énoncera ainsi :

Dans des systèmes vibrants semblables et semblablement constitués, le nombre des vibrations est inversement proportionnel au rapport de similitude, en raison directe de la racine carrée du coefficient d'élasticité et en raison inverse de la racine carrée de la densité.

(¹) Les conditions aux limites sont les conditions habituelles.

CHAPITRE IX

COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES

I. — COMPOSITION DE DEUX MOUVEMENTS VIBRATOIRES PARALLÈLES

388. Battements. — *Théorie.* — Quand deux mouvements vibratoires parallèles se superposent en un même point suivant une même direction, il y a *interférences* si les périodes sont égales, *battements* si les périodes sont presque égales.

L'étude détaillée que nous avons faite du premier phénomène (chap. IV) facilitera celle du second.

Soient en effet, se superposant au même point, deux mouvements vibratoires parallèles et de périodes peu différentes, ayant pour vitesses respectives

$$v = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right)$$

et

$$v' = a' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau'} - \varphi'\right).$$

Si l'on écrit cette dernière sous la forme

$$v' = a' \sin 2\pi\left\{\frac{t}{\tau} - \varphi + \frac{t}{\tau'} - \varphi' - \frac{t}{\tau} + \varphi\right\},$$

ou

$$v' = a' \sin 2\pi\left\{\frac{t}{\tau} - \varphi - \left(\varphi' - \varphi - \frac{\tau - \tau'}{\tau\tau'}t\right)\right\} \text{ (1)},$$

(1) Cette manière d'écrire la formule, en faisant passer une partie du coefficient de t dans la phase, n'aurait aucun sens physique si la partie englobée dans la phase n'était pas très petite ; en tous cas elle laisse la véritable période incertaine.

on voit immédiatement que le mouvement résultant peut être regardé comme produit par la combinaison de deux mouvements vibratoires, ayant la même période et présentant une différence de phase

$$\Phi = \varphi' - \varphi - \frac{\tau - \tau'}{\tau\tau'} t,$$

variable avec le temps, mais lentement variable, puisque, par hypothèse, la différence $\tau - \tau'$ est petite relativement à τ et τ'. Pendant la durée d'une vibration, Φ aura donc une valeur sensiblement constante, et le phénomène se réduira à l'interférence de deux mouvements vibratoires avec cette valeur particulière de la différence de phase. A la vibration suivante, Φ n'est plus tout à fait le même, les conditions d'interférence ont un peu changé. La variation continuant, le phénomène au point considéré se déroule dans le temps comme il se développait précédemment dans l'espace (357). L'intensité du mouvement résultant est maximum aux époques pour lesquelles la différence de phase est égale à un nombre entier quelconque ou à un nombre pair de fois $1/2$, et minimum aux époques où la différence de phase est égale à un nombre impair de fois $1/2$.

Les maxima d'intensité se succèdent à des époques distantes de

$$\theta = \frac{\tau\tau'}{\tau - \tau'},$$

le même temps θ s'écoule entre deux minima consécutifs, et le temps $\frac{\theta}{2}$ sépare un maximum du minimum suivant.

On observe donc une série de *coups* équidistants, séparés par des silences tombant à égale distance des coups; et comme le temps θ peut s'écrire

$$\theta = \frac{1}{\frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{N' - N},$$

N et N′ étant les nombres de vibrations complètes des deux sons considérés pendant l'unité de temps, comme d'ailleurs le nombre B

des battements dans l'unité de temps est précisément égal à l'inverse de la durée de l'un d'eux, on voit que *le nombre des battements pendant l'unité de temps est égal à la différence des nombres absolus de vibrations des deux sons considérés*,

$$B = N' - N.$$

Le phénomène sera d'autant plus marqué que les intensités des deux sons primitifs seront plus près d'être égales : si elles sont égales entre elles et à 1, les coups battront avec une intensité 4, séparés par des silences complets (¹).

Expériences. — Les battements s'observent aisément sur les instruments à sons simples, tels que les diapasons. Que l'on prenne deux gros diapasons munis de leur caisse d'harmonie et sonnant tous les deux la même note, ut_3 par exemple, que l'on désaccorde l'un de ces diapasons (²), et l'on entendra des battements énergiques, d'autant plus rapides que le désaccord sera plus prononcé. Deux grands tuyaux bouchés, à l'unisson, conviennent également bien, les harmoniques supérieurs étant très faibles dans ces instruments : en approchant le doigt de la lumière de l'un d'eux, on en fera descendre le son, et par suite on provoquera des battements. C'est même au moyen des battements que les organistes

(¹) Quand les amplitudes sont égales, on a, en introduisant tout de suite les nombres N et N' et en négligeant les phases φ et φ' que l'on peut toujours rendre nulles par un choix convenable de l'origine des temps,

$$[\sin 2\pi N t + \sin 2\pi N' t = 2 \cos \pi (N - N') t \sin 2\pi \frac{(N + N')t}{2},$$

produit dont le premier facteur montre la variation périodique de l'intensité, et dont le second indique que le nombre des vibrations du mouvement résultant est alors constamment égal à la moyenne $\frac{N + N'}{2}$ des nombres de vibrations des mouvements composants.

Quand les amplitudes sont différentes, la hauteur varie à chaque instant de même que l'intensité, le maximum étant $\frac{Na + N'a'}{a + a'}$, le minimum $\frac{Na - N'a'}{a - a'}$, et la hauteur moyenne pouvant être évaluée à $\frac{Na^2 + N'a'^2}{a^2 + a'^2}$ (Terquem et Boussinesq, *Journal de physique*, IV, 193 ; 1875).

(²) Une surcharge (petite pièce de monnaie ou simple boulette de cire), collée vers le haut d'une des branches, suffit à abaisser le son.

accordent les tuyaux, les coups s'espaçant de plus en plus à mesure que l'on approche de l'unisson.

Deux tuyaux ouverts, deux cordes de contrebasse ou de piano à peu près à l'unisson donneront encore des battements, mais plus difficiles à saisir. En effet les battements de deux sons complexes sont eux-mêmes complexes : à chaque coup du son fondamental correspondent deux coups du deuxième son élémentaire, trois du troisième, etc.; tous ces battements, plus ou moins nets suivant les intensités respectives des harmoniques, s'entremêlent et l'oreille perçoit une modification de la hauteur et de la qualité plutôt que de l'intensité du son ([1]). Il est facile de rendre les battements visibles à l'œil par la méthode optique (397), ou par les flammes manométriques (355). On peut aussi les enregistrer soit directement soit au moyen du phonautographe.

Dans le cas de deux diapasons, l'inscription directe se fait avec l'*appareil de Lissajous et Desains*, qui consiste essentiellement en un diapason mobile traçant ses vibrations sur une plaque de verre noircie portée par un diapason fixe, également en vibration. Dans le modèle primitif, le diapason mobile était déplacé à la main, au-dessus de la plaque de verre simplement collée à la cire sur le diapason fixe. L'instrument actuel permet d'effectuer commodément une combinaison quelconque des deux mouvements vibratoires. C'est un solide banc en fonte, auquel s'adapte d'une manière invariable l'un des diapasons et sur lequel peut glisser un chariot portant l'autre diapason; ce dernier est muni du style; au premier est attachée la plaque de verre noircie. Les deux diapasons étant mis en vibration, il suffit de tirer le chariot pour obtenir sur le verre enfumé le tracé de la combinaison des deux mouvements. On peut d'ailleurs donner à ces mouvements telle relation de direction que l'on veut, en orientant convenablement les deux diapasons, l'un

([1]) L'effet est très frappant sur la sirène double de M. von Helmholtz (355), suivant que l'on met ou non les caisses résonnantes. Dans le premier cas, le son fondamental prédomine ; et si l'on détermine la production des battements en tournant la manivelle *d*, les renforcements et les affaiblissements de l'intensité sont très sensibles. Si l'on enlève au contraire les caisses résonnantes, les sons supérieurs atteignent une intensité relativement grande, et la variation d'intensité pendant le battement devient beaucoup moins saisissante que celle de la hauteur ou du timbre (von Helmholtz, *loc. cit.*, 208).

sur le banc, l'autre sur le chariot qui le porte. Dans le cas actuel, les deux diapasons seront placés parallèlement aux rails sur lesquels glisse le chariot.

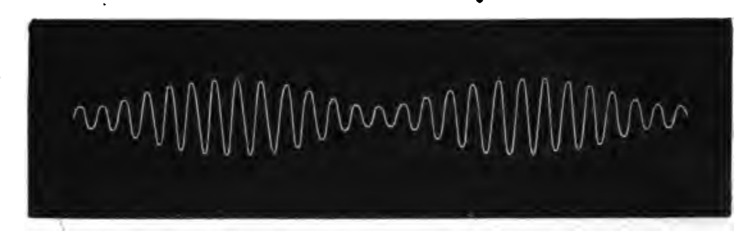


Fig. 131

La figure 131 montre un graphique ainsi obtenu.

Application à la mesure de la hauteur absolue des sons. — Sauveur (¹), qui le premier étudia les battements, en avait conclu un moyen de déterminer la hauteur absolue des sons. Si en effet les deux sons N et N' donnent B battements, on a

$$N' - N = B.$$

Si d'autre part on connaît l'intervalle I des deux sons, on a en outre

$$\frac{N'}{N} = I.$$

Ces deux relations définissent complètement les nombres N et N'. Mais la méthode, exacte en principe, est à peu près impraticable, parce que deux sons ne donnent des battements faciles à compter que quand N' diffère peu de N, et alors l'intervalle I est très difficile à évaluer.

Scheibler (²) réussit à éviter cet inconvénient. Il disposa une série de cinquante-six diapasons échelonnés du la_2 de 220 vibrations au la_3 de 440 vibrations par degrés de quatre vibrations. Chacun de ces degrés pouvant être déterminé avec précision par les battements, et l'intervalle entier pouvant être apprécié très exactement à l'oreille, il eut ainsi un *tonomètre*, au moyen duquel il con-

(¹) SAUVEUR, *Histoire de l'Académie des sciences*, 134; 1700.
(²) SCHEIBLER, *Pogg. Ann.*, XXIX, 390; et XXXII, 333 et 492; 1833-34.

naissait d'abord la hauteur absolue de chacun des diapasons de la série par une succession d'équations évidentes, et qui lui permettait en outre d'obtenir aisément la hauteur absolue d'un son quelconque entre 220 et 440 vibrations, par la simple mesure du nombre des battements que ce son donnait avec celui des diapasons dont il était le plus voisin. On pouvait également opérer sur un son plus grave ou plus aigu, à condition de le ramener d'abord par une série d'octaves entre les limites voulues.

M. Kœnig [1] a construit un grand tonomètre allant de 16 à 32 000 vibrations [2] et comprenant par conséquent toute l'échelle des sons perceptibles.

389. Sons résultants. — *Phénomènes.* — *Quand deux sons suffisamment intenses* N *et* N′ (distants de moins d'une octave [3]), *se font entendre simultanément, de leur concours naît un troisième son dont le nombre de vibrations est*

$$R = N' - N.$$

C'est le son résultant, signalé presque en même temps par Sorge [4] de Hambourg, Romieu [5] de Montpellier et Tartini [6] de Padoue.

Dans les cabinets de physique se trouvent ordinairement deux tuyaux faisant entendre isolément ut_4 et fa_4, et dont le son résultant est fa_2. Pour rendre ce fa_2 plus distinct, on le produit quelque temps au moyen d'un troisième tuyau fa_2 que l'on fait taire ensuite : le son résultant semble alors continuer la voix de ce dernier tuyau devenu silencieux. On peut encore manifester le son résultant par les battements qu'il donnera avec un son voisin.

(1) Kœnig, *Catalogue d'appareils d'acoustique*. Paris ; 1882.

(2) De 16^{vd} à 256^{vd}, huit diapasons à curseur suffisent, chacun d'eux pouvant, selon la position du curseur, donner trente-deux notes différentes. Dans la dernière octave, les diapasons sont remplacés par des tiges droites (332), dont la plus petite $ut_{10} = 32768^{vd}$, ne rendant même plus de son perceptible, peut servir de frappeur sans qu'on ait à craindre la production de sa propre note.

(3) Cette restriction se comprendra plus loin (390).

(4) Sorge, *Anweisung zur Stimmung der Orgelwerke und des Claviers*. Hamburg ; 1744.

(5) Romieu, *Mémoires de l'Académie de Montpellier ;* 1753.

(6) Tartini, *Traité de l'harmonie*. Padoue ; 1754.

Les instruments qui conviennent le mieux pour étudier les sons résultants sont les diapasons (nous y reviendrons bientôt), et particulièrement les diapasons de l'octave 5.

Dans les cours on emploiera avec avantage l'*appareil de Kœnig*, qui se compose de deux tubes de verre [1], frottés longitudinalement par une roue garnie de drap mouillé tournant entre ces deux tubes. A l'aide de ce dispositif on prolonge autant qu'on le désire les sons primaires, et par suite aussi le son résultant, qu'il est dès lors facile de saisir et que l'on peut au besoin mettre en évidence par l'un des artifices indiqués plus haut.

Explication d'Young. — Young [2] attribuait ce son à des battements devenus suffisamment rapides. Et de fait le son résultant se rattache d'une façon incontestable aux battements. A côté d'un diapason donnant $ut_3 = 256^{vd}$, faisons résonner un deuxième diapason dont nous élevons graduellement le ton à partir de l'unisson, et voici les phénomènes que nous constatons [3] : les *battements*, d'abord nettement séparés, se changent avant qu'on arrive à la seconde 288^{vd} (32 battements) en un *roulement* de plus en plus rapide et qui, dans le voisinage de la tierce 320^{vd} (64 battements), n'est plus distinct que comme une simple *dureté* du son [4]. En même temps, on commence à entendre faiblement un ut_1 64^{vd} qui s'élève jusqu'à l'ut_2 128^{vd}, à mesure que l'on approche de la quinte 384^{vd} (128 battements), tandis que la dureté du son disparaît complètement. De 384^{vd} à 448^{vd} le son résultant monte au sol_2 192^{vd} et prend une intensité surprenante relativement à celle qu'il avait eue jusque-là. Bornons-nous à cette première étape, et comparons-en les phénomènes à ceux que l'on obtient avec une roue de Savart, dont on augmente progressivement la vitesse. Ce sont d'abord des *chocs successifs*, puis un *ronflement* qui persiste encore quand il y a 128 chocs à la seconde; mais en dehors de ce ronflement et

(1) L'appareil est accompagné de douze tubes accordés aux notes $ut_6 = 8$, $ré_6 = 9$, $mi_6 = 10$, $fa_6 + = 11$, $sol_6 = 12$, $la_6 - = 13$, $la_6\sharp + = 14$, $si_6 = 15$, $ut_7 = 16$, $mi_7 = 20$, $fa_7\sharp + = 23$, ces derniers pour les sons résultants des intervalles harmoniques (390).

(2) Young, *Phil. Trans.*; 1800; et *Miscellaneous Works*, I, 83.

(3) Voir Kœnig, *loc. cit.*, 100.

(4) En tout cela, M. Kœnig est complètement d'accord avec M. von Helmholtz qui a le premier appelé l'attention sur ce changement des battements en dureté.

en même temps on entend distinctement le son ut_2 128^{vd} (1). La ressemblance avec les battements est complète (2).

Théorie de M. von Helmholtz (3). — Partant de ce fait que les sons primaires doivent avoir une certaine intensité pour donner lieu à des sons résultants sensibles, M. von Helmholtz considère ceux-ci comme une sorte de *perturbation* du mouvement vibratoire, devenu trop violent pour suivre les lois ordinaires.

Quand les vibrations pendulaires sont suffisamment petites, les forces élastiques mises en jeu par les déplacements sont proportionnelles à ces déplacements; et le principe de la superposition pure et simple des petits mouvements, dont nous avons fait si souvent usage jusqu'ici, s'applique en toute rigueur. Quand au contraire les amplitudes des vibrations sont assez grandes pour que le carré des déplacements puisse exercer une influence notable sur la valeur des forces, le calcul montre qu'il se développe un nouveau système de mouvements vibratoires simples. Un diapason ou une cloche que l'on fait vibrer énergiquement émet l'octave (4), tandis que, vibrant avec une force modérée, l'instrument ne donne que des sons supérieurs non harmoniques. Si deux systèmes d'ondes à grandes amplitudes viennent se rencontrer en un même point, deux classes de sons résultants apparaissent, ayant pour types : d'une part, le *son différentiel* dont le nombre de vibrations est égal à la différence des nombres de vibrations des sons primaires; d'autre part, un *son additionnel* dont le nombre de vibrations est égal à la somme des nombres de vibrations des mêmes sons (5). Ce deuxième son échappe évidemment à l'explication d'Young.

(1) Le ronflement domine si les dents rencontrent une lame de bois dur; le son est plus distinct avec une carte pointue et peu résistante.

(2) La coexistence du bruit des chocs séparés et du son continu concorde avec les deux faits suivants, bien connus : 1° il suffit de 16 impulsions primaires pour donner un son (332); 2° l'oreille constate la non-coïncidence de deux pendules dont l'oscillation ne diffère que de 1/100 de seconde, et par conséquent distingue deux impulsions séparées de 1/100 de seconde. (D'après ce qui précède, la rapidité du pouvoir de perception de l'oreille atteint même 1/130 de seconde.)

(3) Helmholtz, *loc. cit.*, 191 et 519.

(4) En faisant vibrer fortement un diapason à branches longues et minces on peut, à l'aide des résonnateurs, constater jusqu'à l'harmonique 4. (Cf. Gripon, *Réunion des sociétés savantes*, 1880; et Kœnig, *Quelques expériences*, p. 193.)

(5) De même que les sons primaires, les harmoniques donnent des sons résultants : ces derniers s'entendent assez facilement sur le violon et sur l'harmonium.

Importance musicale des sons résultants. — Les sons résultants jouent un rôle important en musique, par l'influence qu'ils exercent sur la justesse des accords.

Considérons par exemple les deux accords parfaits (335) complétés par l'octave.

Dans l'accord parfait majeur

$$1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad 2,$$

les sons résultants sont

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad 1,$$

c'est-à-dire la double octave grave du son fondamental, l'octave de ce même son, l'octave grave de la quinte, et le son fondamental; tous ces sons renforcent simplement les sons primaires et particulièrement le son fondamental; l'accord est franc et solide.

L'accord parfait mineur

$$1 \quad \frac{6}{5} \quad \frac{3}{2} \quad 2,$$

admet pour sons résultants

$$\frac{1}{5} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{5} \quad 1,$$

c'est-à-dire la double octave basse de la tierce majeure grave, la double octave basse de la tierce mineure, l'octave basse du son fondamental, la tierce majeure grave, enfin le son fondamental. Ici un son nouveau apparaît répété, la tierce majeure grave, qui est en dissonnance avec la quinte. De là le caractère indécis, inquiet, de l'accord mineur [1].

390. Battements des intervalles harmoniques. — Reprenons notre expérience avec les deux diapasons rendant des sons simples, l'un fixe à ut_3, l'autre mobile à partir de la même note; et

[1] Les considérations précédentes s'appliquent aux différentes formes que l'on peut donner à l'accord parfait par *renversement*, c'est-à-dire en transposant d'une octave une ou plusieurs de ces notes. Les sons résultants se trouvent alors modifiés, et introduisent ces dissonnances secondaires dont Palestrina sut tirer un si admirable parti.

poussons celui-ci au-dessus de 448^{vd} : le son résultant différentiel du premier ordre, très net, s'affaiblit rapidement en même temps qu'un autre son résultant beaucoup moins intense, dont l'existence pouvait cependant être constatée depuis la tierce jusqu'à la quinte pendant qu'il descendait de sol_3 à ut_2 ; et successivement reviennent, vers 472^{vd} la dureté, vers 488^{vd} le roulement, puis les battements séparés qui cessent à leur tour quand on arrive à l'octave $ut_4 = 512^{vd}$. Au delà, les battements reparaissent, pour ne bientôt plus s'entendre que comme une simple dureté, et ainsi de suite. Sur chaque harmonique kN se manifestent des battements dont le nombre est m quand le son $kN \pm m$ s'unit au son N; et ces battements peuvent amener des sons continus à la condition d'être assez nombreux et assez intenses.

Hallström (1) expliquait les battements des intervalles harmoniques par l'intervention des sons résultants. Ainsi les 2 battements donnés par $8N-2$ et N (battements très nets si $N = 64^{vd} = ut_1$) proviendraient de la combinaison successive de N (2) d'abord avec le son $8N-2$, d'où le résultant $7N-2$, puis avec ce son $7N-2$, d'où le résultant $6N-2$, puis avec ce son $6N-2$,... enfin avec le son $N-2$, d'où 2 battements. Mais ces sons intermédiaires échappent absolument à l'observation. Il est donc plus simple de supposer que les battements des intervalles harmoniques sont dus, comme ceux de l'unisson, à la composition directe des ondes sonores, amenant la coïncidence périodique des maxima de même signe (3). Les tracés graphiques exécutés au moyen de l'appareil de Lissajous et Desains semblent confirmer cette manière de voir, et en tous cas seront utilement consultés dans ces questions délicates.

391. Sons de variation. — Deux sons d'égale intensité, dont les nombres de vibrations N et N' sont voisins, équivalent à un son unique, de hauteur $H = \frac{N + N'}{2}$ et d'intensité périodiquement variable, exécutant $N' - N = B$ battements (388).

(1) Hallstrœm, *Pogg. Ann.*, XXIV, 438; 1831.

(2) Le son N est, naturellement, supposé simple; car s'il était accompagné d'harmoniques, les battements s'expliqueraient par là même.

(3) Kœnig, *loc. cit.*, 95; et Radau, *Moniteur scientifique de Quesneville*, (3), VI, 333; 1876.

Réciproquement, un son H, dont l'intensité est affectée de B variations périodiques dans l'unité de temps, donnera naissance à deux *sons de variation* $H + \frac{B}{2}$ et $H - \frac{B}{2}$.

Nous avons en effet

$$\cos \pi B t \sin 2\pi H t = \frac{1}{2} \sin 2\pi \left(H + \frac{B}{2}\right) t + \frac{1}{2} \sin 2\pi \left(H - \frac{B}{2}\right) t.$$

Ces sons de variation, comme l'a indiqué M. Radau ([1]), se constatent dans l'expérience d'interférence de Lissajous (355), quand l'écran découpé tourne rapidement. Si S est le nombre des secteurs vibrants et T le nombre des tours de l'écran pendant une seconde, on a $B = ST$.

On peut opérer sans écran, à la condition d'imprimer à la plaque un mouvement de rotation dans son plan. En faisant ainsi tourner, à raison de $19^{T},5$ par seconde, une plaque qui rendait le $fa_3 = 340^{vd}$ lorsqu'elle se divisait en 4 secteurs, M. Beetz ([2]) a observé les deux sons $sol_3 = 380^{vd}$ et $mi_{3}\flat = 300^{vd}$. On avait en effet

$$H = 340, \qquad S = 4, \qquad T = 19,5,$$

d'où

$$H + \frac{ST}{2} = 379 \qquad \text{et} \qquad H - \frac{ST}{2} = 301.$$

Un procédé plus direct pour obtenir les sons de variation consiste à faire tourner devant un diapason (ut_4) un disque de sirène à grands trous. On intercale entre le disque et le diapason un tuyau renforçant d'un diamètre égal à celui des trous du disque, de sorte que le son retentit énergiquement chaque fois qu'un des trous passe en face du tuyau. Les sons de variation se perçoivent alors avec une netteté surprenante; selon que la vitesse de rotation est accélérée ou ralentie, on les entend très bien s'écarter ou se rapprocher ([3]).

392. Superposition de mouvements pendulaires har-

([1]) RADAU, *Moniteur scientifique de Quesneville*, (2), II, 430, et III, 792; 1865-66.
([2]) BEETZ, *Pogg. Ann.*, CXXX, 313 et 587; 1867.
([3]) KŒNIG, *loc. cit.*, 139.

moniques. — Un cas important de l'addition des mouvements pendulaires parallèles se rencontre quand les nombres de vibrations des mouvements composants sont des multiples entiers du plus petit d'entre eux, ou, ce qui est la même chose, quand en un même point se superposent un son fondamental et ses harmoniques. Le mouvement résultant admet alors évidemment pour période celle du son fondamental. La figure ci-jointe, empruntée au livre de

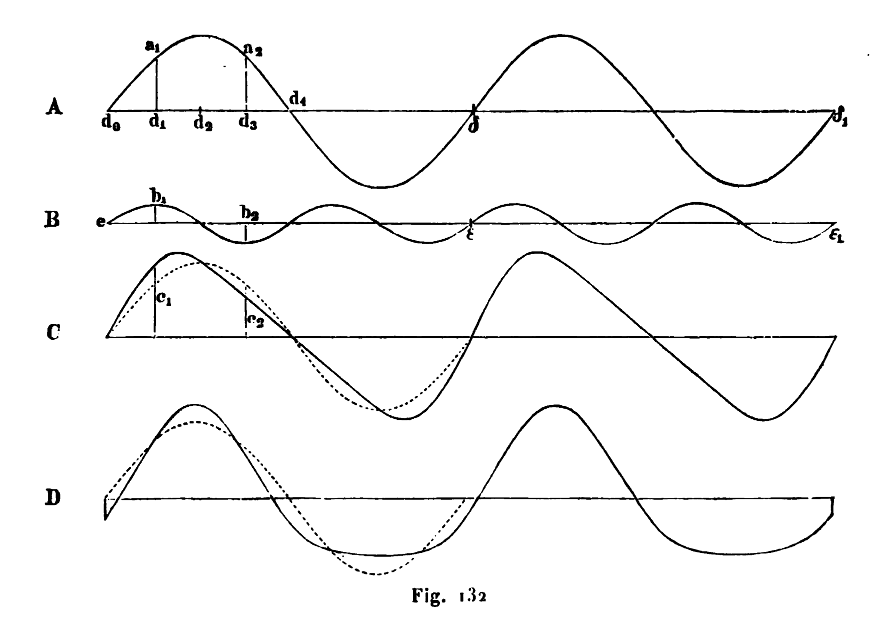


Fig. 132

M. von Helmholtz, présente en C le résultat de la composition de deux mouvements vibratoires simples A et B, dont les nombres de vibrations sont entre eux comme 1 : 2, et dont la différence de phase est o (les points d_0 et e se superposent, les ordonnées c_1, c_2... sont les sommes géométriques des ordonnées a_1 et b_1, a_2 et b_2...). En D la différence de phase est 1/8 de la période du son fondamental (le point e coïncide avec le point d_1). Sur la moitié gauche de la figure on a marqué en ponctué la courbe A, afin de rendre immédiatement sensible à l'œil la composition des deux mouvements. L'examen de la moitié droite où manque ce repère, montre que la courbe résultante ne porte pas nécessairement l'indication des mouvements composants.

Sans doute l'existence d'un son supérieur peut s'accuser par des dentelures sur les festons de la sinussoïde fondamentale, comme dans l'exemple représenté fig. 108, mais le plus souvent l'œil sera incapable de démêler sur la courbe résultante la nature des mouvements composants. Comment pourrait-il y réussir sur des courbes telles que celles des fig. 10 et 11?

En tous cas, on conçoit que le mode de superposition que nous venons d'indiquer est susceptible de donner pour une même période une infinité de courbes caractérisant une infinité de mouvements vibratoires d'espèces différentes.

393. Théorème de Fourier [1]. — Fourier a démontré qu'*une fonction périodique quelconque, de période* τ, *peut toujours et d'une seule manière, être remplacée par une somme de fonctions circulaires de périodes* $\tau, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{3} \ldots,$

$$A \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi\right) + A' \cos 2\pi\left(\frac{t}{\frac{\tau}{2}} - \varphi'\right) + A'' \cos 2\pi\left(\frac{t}{\frac{\tau}{3}} - \varphi''\right) + \ldots,$$

les coefficients A, A', A''..., $\varphi, \varphi', \varphi''\ldots$, en nombre infini, étant calculables dans chaque cas.

Il en résulte que *tout mouvement vibratoire peut toujours et d'une seule manière être considéré comme résultant de la superposition d'un certain nombre de mouvements vibratoires pendulaires.*

II. — COMPOSITION DE DEUX MOUVEMENTS VIBRATOIRES RECTANGULAIRES.

394. Étude théorique de la superposition de deux mouvements vibratoires rectangulaires. — *Équations fondamentales.* — Examinons maintenant deux mouvements vibratoires à angle droit. Les mouvements étant toujours supposés pendulaires, si nous prenons pour axes les deux directions suivant lesquelles

[1] FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur.* Paris; 1821.

ils s'effectuent, les déplacements pourront se représenter par

$$x = k \cos 2\pi(\mathrm{M}t - \varphi),$$

et

$$y = l \cos 2\pi \mathrm{N}t,$$

M et N étant les nombres de vibrations dans l'unité de temps, et φ la différence de phase des deux mouvements composants dont les amplitudes sont respectivement k et l. La trajectoire du mouvement résultant s'obtiendra par l'élimination de t entre ces deux équations.

Cette élimination, difficile dans le cas général, est au contraire très simple dans certains cas particuliers, les plus importants pour la pratique.

Unisson. — Supposons d'abord les deux mouvements à l'unisson, $\mathrm{M} = \mathrm{N}$, on a alors

$$\frac{x}{k} = \cos 2\pi \mathrm{N}t \cos 2\pi\varphi + \sin 2\pi \mathrm{N}t \sin 2\pi\varphi,$$

ou

$$\frac{x}{k} = \frac{y}{l} \cos 2\pi\varphi \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}} \sin 2\pi\varphi,$$

et en conséquence

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{2xy}{kl} \cos 2\pi\varphi = \sin^2 2\pi\varphi,$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et inscrite dans le rectangle $2k, 2l$, suivant une orientation qui dépend de l'angle $2\pi\varphi$.

Car, si l'on fait successivement $x = k$ et $y = l$ dans l'équation de l'ellipse, il vient $\mathrm{LT} = l \cos 2\pi\varphi$ et $\mathrm{L'T'} = k \cos 2\pi\varphi$, d'où

$$\cos 2\pi\varphi = \frac{\mathrm{LT}}{\mathrm{OL'}} = \frac{\mathrm{L'T'}}{\mathrm{OL}}.$$

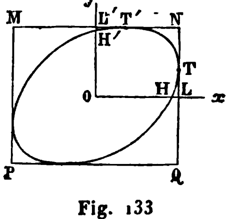


Fig. 133

De même, en faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$, on trouve

$$\sin 2\pi\varphi = \frac{\mathrm{OH'}}{\mathrm{OL'}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OL}}.$$

Si la différence de phase des deux mouvements composants est nulle, en d'autres termes si $\varphi = 0$, l'équation devient

$$\frac{x}{k} - \frac{y}{l} = 0;$$

l'ellipse se réduit à une droite PN ayant pour coefficient angulaire $\frac{l}{k}$; et puisque x et y partent au début de k et de l pour s'annuler en même temps et arriver ensuite à $-k$, $-l$, la droite

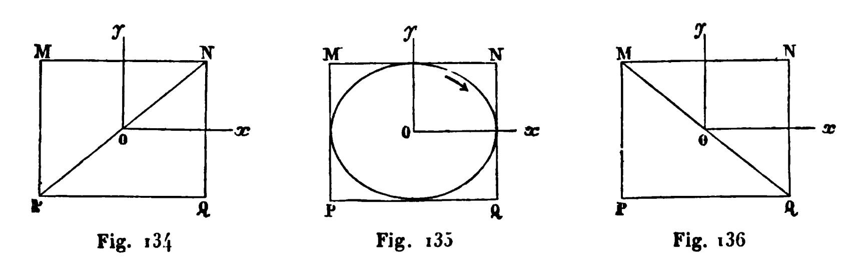


Fig. 134 Fig. 135 Fig. 136

est décrite d'abord de N en P, puis de P en N, et ainsi de suite indéfiniment.

Si $\varphi = \frac{1}{4}$, l'équation représente une ellipse rapportée à ses axes,

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1,$$

et les mouvements composants étant alors

$$x = k \sin 2\pi N t \quad \text{et} \quad y = l \cos 2\pi N t,$$

on voit que l'ellipse est parcourue dans le sens de la flèche, ou dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre : cette giration de gauche à droite (pour un observateur en O) est dite *dextrorsum*.

Quand en outre $k = l$, l'ellipse devient un cercle.

Si $\varphi = \frac{1}{2}$, on a une droite MQ,

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} = 0,$$

symétrique de la précédente PN par rapport aux axes, et parcourue d'abord de M en Q, puis de Q en M, et ainsi de suite.

En résumé, pour les valeurs de φ comprises entre o et $1/2$, la courbe est une ellipse ayant son grand axe dirigé dans l'angle $x\mathrm{O}y$ si la différence de phase est inférieure à $1/4$, et dans l'angle $x'\mathrm{O}y$ si cette différence est supérieure à $1/4$.

Puis, φ croissant de $1/2$ à 1, la courbe repasse en sens inverse par les mêmes formes; et ces diverses trajectoires sont parcourues en sens contraire : la giration est *sinistrorsum*.

Les valeurs de φ supérieures à 1 redonnent les mêmes courbes, puisque d'une manière générale une différence de phase égale à un nombre entier plus une fraction n'intervient algébriquement que par cette fraction seule.

Accords harmoniques. — Quand les nombres de vibrations M et N sont dans le rapport de p à 1, on peut poser

$$x = k\cos 2\pi(p\mathrm{N}t - \varphi),$$
$$y = l\cos 2\pi\,\mathrm{N}t;$$

et, si l'on développe l'expression de x, il vient

$$\begin{aligned} x = k\cos 2\pi\varphi\Big[&(\cos 2\pi\mathrm{N}t)^p - \frac{p(p-1)}{1.2}(\cos 2\pi\mathrm{N}t)^{p-2}\sin^2 2\pi\mathrm{N}t + \ldots\Big] \\ + k\sin 2\pi\varphi\Big[&\frac{p}{1}(\cos 2\pi\mathrm{N}t)^{p-1}\sin 2\pi\mathrm{N}t - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\cos 2\pi\mathrm{N}t)^{p-3}\sin^3 2\pi\mathrm{N}t + \ldots\Big], \end{aligned}$$

ou, puisque $\cos 2\pi\mathrm{N}t = \frac{y}{l}$ et $\sin 2\pi\mathrm{N}t = \pm\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}$,

$$\begin{aligned} x = k\cos 2\pi\varphi\Big[&\frac{y^p}{l^p} - \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{y^{p-2}}{l^{p-2}}\Big(1 - \frac{y^2}{l^2}\Big) + \ldots\Big] \\ \pm k\sin 2\pi\varphi\Big[&\frac{p}{1}\frac{y^{p-1}}{l^{p-1}}\Big(1 - \frac{y^2}{l^2}\Big)^{\frac{1}{2}} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\frac{y^{p-3}}{l^{p-3}}\Big(1 - \frac{y^2}{l^2}\Big)^{\frac{3}{2}} + \ldots\Big]. \end{aligned}$$

On a donc

pour $p = 2$ (octave)

$$x = k\cos 2\pi\varphi\left(2\frac{y^2}{l^2} - 1\right) \pm k\sin 2\pi\varphi\left(2\frac{y}{l}\right)\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}},$$

pour $p=3$ (douzième)

$$x=k\cos 2\pi\varphi\left(4\frac{y^3}{l^3}-3\frac{y}{l}\right)\pm k\sin 2\pi\varphi\left(4\frac{y^2}{l^2}-1\right)\sqrt{1-\frac{y^2}{l^2}}.$$

. . . .

La courbe $p=2$ est une parabole

$$x=k\left(2\frac{y^2}{l^2}-1\right) \quad \text{quand} \quad \varphi=0,$$

$$x=-k\left(2\frac{y^2}{l^2}-1\right) \quad \text{quand} \quad \varphi=\frac{1}{2}.$$

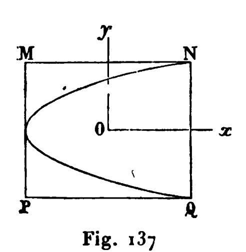


Fig. 137

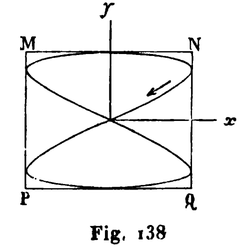


Fig. 138

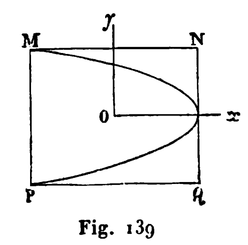


Fig. 139

Lorsque $\varphi=\frac{1}{4}$, l'équation devient

$$x=\pm k\left(2\frac{y}{l}\right)\sqrt{1-\frac{y^2}{l^2}}:$$

elle représente une courbe en forme de 8, passant par l'origine qui est à la fois centre et point multiple. La courbe a deux sommets verticaux

$$x=0, \qquad y=\pm l,$$

et quatre sommets horizontaux

$$y=\pm\frac{l}{\sqrt{2}}, \qquad x=\pm k.$$

Entre ces deux figures, les variations de la phase amènent une série de formes toutes inscrites dans le rectangle $2k, 2l$, et que l'on peut concevoir en supposant que le 8 se plie par le milieu et rapproche ses branches, de façon à arriver enfin à l'arc parabolique.

La courbe $p=3$ se réduit à une S,

$$x = k\left(4\frac{y^3}{l^3} - 3\frac{y}{l}\right) \qquad \text{quand} \qquad \varphi = 0,$$

$$x = -k\left(4\frac{y^3}{l^3} - 3\frac{y}{l}\right) \qquad \text{quand} \qquad \varphi = \frac{1}{2}.$$

Pour $\varphi = \frac{1}{4}$, on a une sorte de 8 à double croisement, dont l'équation est

$$x = \pm k\left(4\frac{y^2}{l^2} - 1\right)\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}:$$

la courbe offre un sommet vertical à chaque extrémité $\pm l$ de l'axe transverse, et trois sommets horizontaux sur chacun des côtés $x = \pm k$ du rectangle circonscrit $\left(\text{en } y = 0 \text{ et } y = \pm l\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$.

Cas général. — D'une manière générale, si les nombres de vibrations des deux mouvements vibratoires rectangulaires M et N sont dans le rapport $p : q$, p et q étant des nombres premiers entre eux, la courbe résultant de leur combinaison présentera p contacts avec chacun des côtés ($x = \pm k$) et q contacts avec chacun des côtés ($y = \pm l$) du rectangle $2k, 2l$. En effet, dans l'intervalle de temps $pT = q\tau$ $\left(T \text{ et } \tau \text{ étant les périodes } \frac{1}{M} \text{ et } \frac{1}{N} \text{ des deux mouvements}\right)$, x devient p fois égal à k, et y devient q fois égal à l. Comme d'ailleurs elle est continue, *la trajectoire a* p *sommets horizontaux et* q *sommets verticaux.* Au bout du temps $pT = q\tau$, le mobile est revenu au point de départ : la même trajectoire est ensuite parcourue indéfiniment dans les mêmes conditions.

Représentation géométrique de Lissajous. — Lissajous [1] a donné un moyen élégant de construire et de se représenter les différentes figures qui correspondent à un même rapport des mouvements composants.

[1] LISSAJOUS, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 147; 1857.

On peut toujours, en choisissant convenablement l'unité de temps, mettre les deux déplacements sous la forme

$$x = k \cos m\,(t - \theta),$$
$$y = l \cos t,$$

où m désigne un nombre entier ou fractionnaire.

Que l'on trace la courbe ABCDE... représentée par l'équation $x = k \cos m\,(t - \theta)$; que l'on construise d'autre part le cylindre circulaire droit IKLN de diamètre $2l$; qu'on enroule la courbe ABCDE... sur le cylindre en plaçant aA suivant la génératrice IK; enfin que l'on projette sur le plan méridien IN la courbe ainsi enroulée : cette projection sera la figure cherchée.

Considérons en effet un point M de la courbe cylindrique et la projection P de ce point sur le plan IN; l'arc am étant par définition égal à t, nous avons

$$\mathrm{OQ} = l \cos t = y.$$

D'ailleurs

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{M}m = x.$$

Or PQ et OQ sont les coordonnées du point P par rapport à l'axe du cylindre Ox et au diamètre Oa. Le lieu du point P est donc bien la trajectoire du mouvement résultant.

Fig. 140

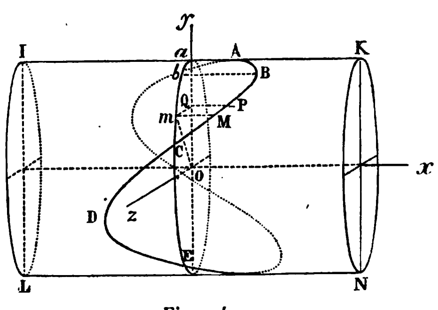


Fig. 141

La figure se rapporte au cas de $m = 2$ (octave). En général, m étant égal à $\frac{p}{q}$, le point M exécutera p sinuosités complètes de part et d'autre du cercle moyen, tout en effectuant q tours entiers autour du cylindre. On voit ainsi immédiatement que la trajectoire du point P est tangente p fois à chacune des lignes $x = \pm k$, et q fois à chacune des lignes $x = \pm l$.

Si, les deux mouvements composants restant les mêmes, la différence de phase varie, en d'autres termes si le point A est un autre point de la sinussoïde ABCDE..., on aura encore la même courbe enroulée sur le même cylindre, seulement le plan de projection sera un autre plan méridien. Au lieu de changer le plan de projection, nous pouvons supposer que ce plan est fixe et que le cylindre tourne sur lui-même, avec la courbe qu'il porte, d'une fraction de tour égale à $\frac{q}{p}\varphi$ [1], c'est-à-dire d'une fraction de tour égale à la phase rapportée à la plus longue période, phase que nous désignerons par ψ. Si donc, ayant décalqué la courbe ABCDE... sur un cylindre de verre, on fait tourner ce cylindre sur lui-même, l'œil placé un peu loin dans la direction Oz verra successivement toutes les formes de la courbe correspondant à la valeur choisie du rapport $\frac{p}{q} = m$. On peut, comme l'a indiqué M. Terquem [2], découper dans des feuilles de tôle les sinussoïdes k que l'on enroule ensuite suivant les cylindres l : on a ainsi des gabarits qu'il suffit de faire tourner entre une source de lumière parallèle et un écran pour que leur ombre sur cet écran affecte les diverses formes de chaque type.

La figure se reproduit pour une rotation du cylindre égale à $\frac{1^{\text{tour}}}{p}$, c'est-à-dire pour une variation de ψ égale à $\frac{1}{p}$. Les formes simplifiées par la superposition des parties antérieures et postérieures

(1) Cette valeur résulte immédiatement de la construction géométrique de la courbe ; on peut aussi la déduire de l'identité $\frac{M}{N}\theta = 2\pi\varphi$, d'où, $\frac{M}{N}$ étant égal à $\frac{p}{q}$, on tire $\theta = 2\pi\varphi\frac{q}{p}$, ou $\theta = 2\pi\psi$, si l'on pose $\varphi\frac{q}{p} = \psi$.

(2) Terquem, *Séances de la Société française de physique ;* 1876, p. 102.

de la courbe cylindrique reparaissent après une rotation de $\frac{1^{\text{tour}}}{2p}$: ces formes répondent aux phases $\psi = 0$, $\psi = \frac{1}{2p}$, $= \frac{2}{2p}, \ldots$

395. Appareils montrant les figures résultant de la combinaison de deux mouvements vibratoires rectangulaires. — Les figures résultant de la combinaison de deux mouvements vibratoires rectangulaires s'observent aisément.

On peut d'abord employer à cet effet des pendules.

Une pointe fixée à l'extrémité d'un pendule ordinaire trace en général une ellipse, qui devient dans certains cas particuliers une droite ou un cercle.

Pour avoir l'une des figures $\frac{p}{q}$, il suffit d'attacher l'un au-dessous de l'autre deux pendules de longueurs convenables, ou de limiter dans un certain sens (au moyen de deux règles parallèles) les oscillations d'un pendule unique. Eisenhohr, Mohr, Knoblauch ont construit sur ces principes des appareils plus ou moins compliqués. M. Lymann place sous la pointe d'un pendule une plaque de verre enfumée, portée par le prolongement d'un deuxième pendule au-dessus de son point de suspension ; il obtient ainsi un tracé qui dépend du rapport entre les longueurs des deux pendules et de l'angle de leurs plans d'oscillation.

396. Caléidophone de Wheatstone. — Wheatstone, qui le premier distingua ces phénomènes, les produisait au moyen de son caléidophone (379). Lorsqu'une des verges est écartée de sa position d'équilibre, elle y revient en effectuant des oscillations qui peuvent être planes, mais qui le plus souvent sont gauches et résultent précisément de la superposition de deux systèmes rectangulaires d'oscillations planes.

Considérons, par exemple, la tige à section carrée : si avec le doigt on la fléchit parallèlement à l'un des couples de côtés du carré, puis qu'on l'abandonne à elle-même, elle exécute des oscillations planes, et son extrémité trace une petite droite parallèle à ce couple; sollicitée parallèlement à l'autre couple de côtés, elle décrit de même une droite parallèle à ce deuxième couple; si

on l'attaque obliquement, elle offre l'une des formes de l'ellipse.

La tige ayant pour section un rectangle dont les côtés sont dans le rapport $p : q$, présentera la figure $p : q$.

Dans le *caléidophone universel*, construit à peu près simultanément par Lippich [1] et par Melde [2], une longue bande d'acier, fixée solidement par son bout inférieur, porte à sa partie supérieure une deuxième bande, dont le plan est perpendiculaire à celui de la première et dont on peut modifier la longueur : le système est surmonté d'une perle réfléchissante qui, les verges étant mises en vibration, dessinera la figure correspondant au rapport établi.

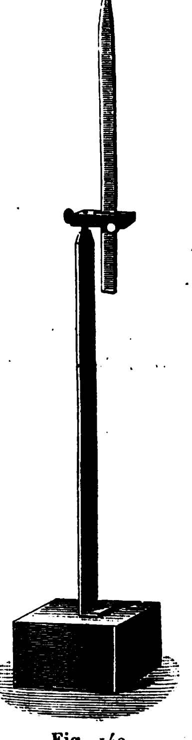


Fig. 142

397. Méthode optique de Lissajous. — Lissajous [3] a imaginé une méthode élégante de produire ces figures, et il en a tiré un procédé remarquablement exact pour accorder à tel intervalle que l'on veut deux diapasons et en général deux instruments quelconques.

La méthode créée par Lissajous, et devenue célèbre sous le nom de *méthode optique*, consiste essentiellement à faire tracer la figure par un rayon lumineux, soumis successivement à l'action de deux diapasons présentant l'intervalle voulu. Chaque diapason est à cet effet muni d'un petit miroir (ou d'une petite lentille) à l'extrémité de l'une de ses branches, l'autre branche portant un contre-poids.

Tracé optique des vibrations d'un diapason. — Prenons d'abord un seul diapason D, et au moyen d'une lentille L dirigeons sur son miroir m un faisceau de rayons solaires : ce faisceau se réfléchit, va frapper un miroir auxiliaire M, puis enfin est reçu sur un écran placé au foyer conjugué de l'ouverture par

(1) LIPPICH, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, XLV; et *Pogg. Ann.*, CXVII, 161; 1862.

(2) MELDE, *Pogg. Ann.*, CXV, 117; 1862. Melde a publié un atlas détaillé de ces courbes dans son *Lehre von der Schwingungscurven*. Leipzig; 1864.

(3) LISSAJOUS, *loc. cit.*

laquelle entrent les rayons solaires. Si l'on fait vibrer le diapason, la tache lumineuse se meut sur l'écran suivant une droite II',

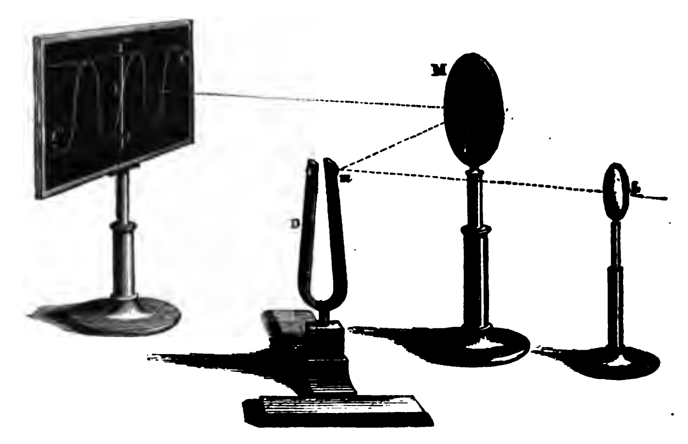


Fig. 143

parallèle au plan des branches du diapason et qui semble lumineuse dans toute sa longueur à cause de la persistance des impres-

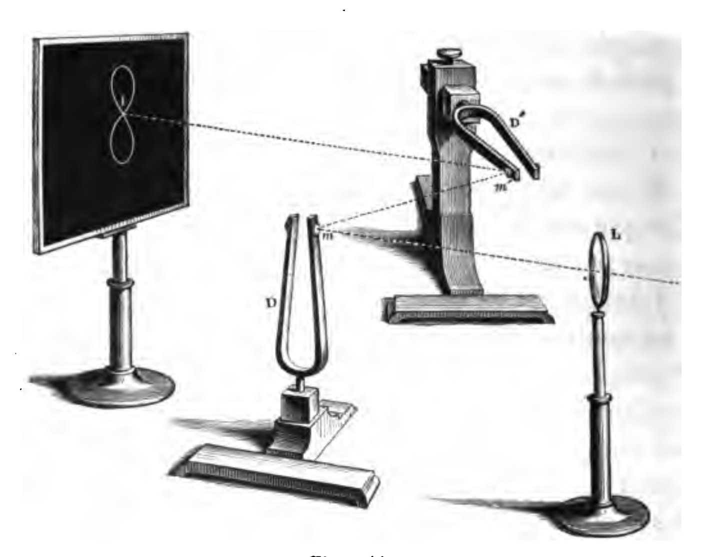


Fig. 144

sions sur la rétine. Pour séparer les vibrations successives, il suffit d'imprimer au miroir M un léger mouvement de rotation autour

de son axe vertical : on voit alors sur l'écran se peindre une courbe sinueuse qui est en quelque sorte le tracé optique de la vibration.

Composition optique de deux mouvements vibratoires rectangulaires. — Au miroir M substituons maintenant un deuxième diapason D', ayant son plan de vibration perpendiculaire au plan de vibration du diapason D. Si, le diapason D étant immobile, le diapason D' oscille seul, la tache lumineuse posée sur l'écran décrira une petite droite parallèle au plan des branches de ce diapason, perpendiculaire par conséquent à la petite droite résultant des vibrations du diapason D seul. Si l'on fait osciller les deux diapasons à la fois, on voit apparaître l'une des formes de la courbe caractéristique de l'intervalle D' : D (1).

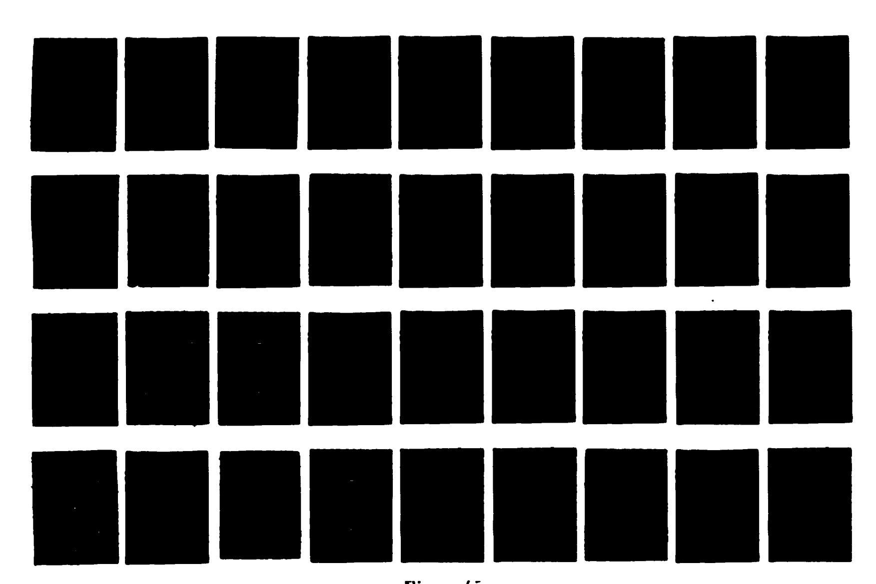


Fig. 145

Les tracés ci-joints, empruntés au mémoire de Lissajous (2),

(1) La courbe semble continue si elle met à se fermer moins de 1/15 de seconde ; dans le cas contraire, elle paraît animée d'une sorte de trémulation comme si une onde obscure courait rapidement le long du trait lumineux.

(2) Dans cette figure, le diapason le plus grave, placé verticalement, ainsi que nous l'avons supposé jusqu'ici, vibre le plus énergiquement ($l > k$) ; les phases sont comptées négativement et rapportées à la période la plus longue.

représentent les formes principales relatives aux accords fondamentaux (unisson, octave, douzième et quinte).

Démonstration de la nature de la vibration d'un diapason. — Ces tracés coïncident exactement avec les courbes théoriques, et cette coïncidence est la preuve que les oscillations sont pendulaires.

Déformation des figures de Lissajous. — La forme particulière de la courbe dépend de la différence de phase ([1]), laquelle dépend elle-même du mode d'attaque, c'est-à-dire d'un ensemble de circonstances indéterminées, ou de ce que l'on appelle le hasard. Une fois établie, cette forme persiste indéfiniment si les diapasons sont exactement accordés ([2]). Sinon, on voit la figure acoustique se modifier et prendre successivement toutes les formes du type ([3]).

Soient en effet deux mouvements vibratoires rectangulaires dont les nombres de vibrations sont dans le rapport de $m+\varepsilon$ à 1 $\left(m\right.$ désignant toujours le rapport $\frac{p}{q}$ du nombre des vibrations suivant Ox au nombre des vibrations suivant Oy, et p étant supposé $\left.> q\right)$,

$$x = k \cos 2\pi (m\mathrm{N}t + \varepsilon \mathrm{N}t - \varphi),$$
$$y = l \cos 2\pi \mathrm{N}t.$$

On peut faire passer les vibrations excédentes dans la différence de phase et poser

$$\Phi = \varphi - \varepsilon \mathrm{N}t.$$

([1]) Pour montrer l'influence de la différence de phase, on emploiera utilement l'appareil construit à cet effet par Lissajous. Sur un bâtis en bois sont fixés deux ressorts d'acier, l'un horizontal, l'autre vertical, portant chacun à leur extrémité libre une lentille. Ces deux lentilles sont en face l'une de l'autre, et leur ensemble donne sur un écran une image de l'ouverture par laquelle on lance sur elles les rayons d'une source intense. Entre les deux ressorts peut tourner un axe muni de deux excentriques, qui actionnent séparément chacun des ressorts. Suivant le calage de ces excentriques, les mouvements oscillatoires des deux lentilles présenteront telle différence de phase que l'on voudra, et la courbe lumineuse tracée sur l'écran répondra à cette différence de phase.

([2]) Avec des diapasons entretenus électriquement et munis de contre-poids à mouvements micrométriques, on peut maintenir la figure absolument immobile, ou la faire varier aussi lentement qu'on le désire. Th. et A. Duboscq ont construit sur les indications de M. Mercadier des appareils satisfaisant très bien à ces conditions.

([3]) En combinant au moyen de l'appareil de Lissajous et Desains (388) les vibrations rectangulaires de deux diapasons M et N, on obtient un tracé montrant la déformation continue de la figure acoustique $\mathrm{M} : \mathrm{N} = p : q$.

La différence de phase variant avec le temps, la courbe se modifiera, les diverses formes se déroulant successivement.

Comme Φ varie de 1 dans le temps $\frac{1}{\varepsilon N}$, Ψ variera de 1 dans le temps $\frac{p}{q\varepsilon N}$; Ψ devant varier de $\frac{1}{2p}$ pour passer d'une forme simplifiée à la suivante, ce passage demandera un temps

$$\Theta = \frac{1}{2q\varepsilon N}.$$

Ainsi la déformation de la courbe prouve le désaccord, et la rapidité de cette déformation le mesure.

Le procédé est général et peut s'appliquer à l'étude de toute espèce de mouvement vibratoire (¹). Il suffit de composer rectangulairement ce mouvement avec celui d'un diapason connu.

Comparateur optique. — Lissajous a construit à cet effet son

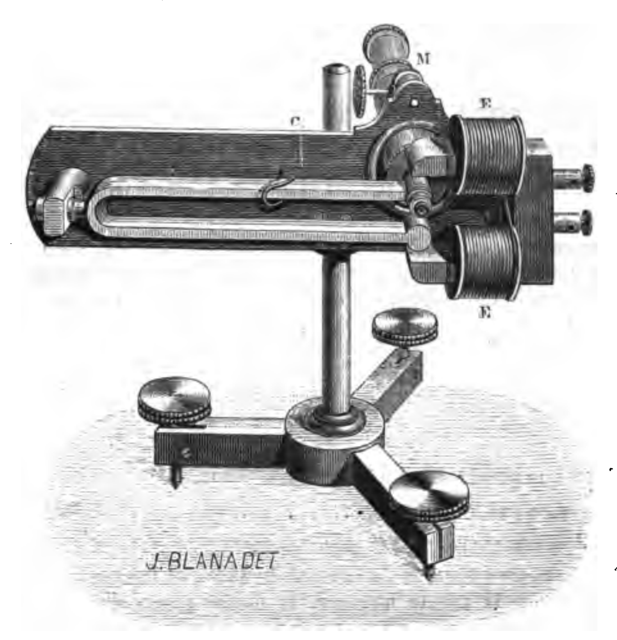


Fig. 146

comparateur optique. C'est un microscope dont l'oculaire et l'ob-

(¹) On peut même étudier par ce moyen les vibrations d'une colonne gazeuse (MACH, *Optische-akustiche Versuche;* et *Journal de physique*, II, 338 ; 1873 (Crova).

jectif sont indépendants : l'oculaire est monté invariablement sur un pied solide, tandis que l'objectif s'adapte à l'une des branches du diapason type (un contre-poids est placé sur l'autre branche). Le diapason étant mis en vibration, on examine au microscope un point du corps à étudier (diapason, corde, membrane de phonautoscope ou de capsule, etc.), placé dans le champ de telle manière que ses vibrations s'effectuent perpendiculairement à celles du diapason.

La figure 146 montre cet appareil sous la forme que lui a donnée M. von Helmholtz : M est le corps du *microscope à vibration* dont l'objectif est porté par le diapason D. Un petit curseur C sert à régler la hauteur du diapason ; un électro-aimant E permet de prolonger autant que l'on veut la durée de l'expérience.

Par la méthode de Lissajous ou par la méthode stroboscopique (362), qui au fond est équivalente, on peut déterminer sans le secours de l'oreille un intervalle musical avec une exactitude en quelque sorte illimitée [1].

398. Expérience de Foucault [2]. — Nous ne quitterons pas ce sujet sans rappeler la curieuse expérience de Foucault sur la verge vibrante. Prenant un fil d'acier de 2^{mm} de diamètre et de

[1] Si par exemple on combine un diapason battant 250^{vd} en 1^s avec un deuxième à la quinte en dessus du premier, si d'ailleurs cette quinte est un peu forte, et si l'intervalle entre deux coïncidences dure 25^s, on aura

$$25 = \frac{1}{2.2.\varepsilon.250},$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{1}{25000}.$$

On en conclura que pendant ces 25 secondes

le premier exécute .... 6250^{vd}
le deuxième .... $9375 + 1/4$.

Si, l'un des diapasons étant le *la* normal de 435^{vd}, et l'autre un diapason que l'on veut accorder à la même hauteur, la figure passe d'une coïncidence à l'autre en 1 minute, cela signifie que pendant 1 minute ou pendant la durée de 26000^{vd}, le deuxième diapason a gagné 1/2 vibration double, ou que l'erreur ε est égale à $\frac{1}{5200}$.

Ces exemples montrent bien quel est le degré d'exactitude du procédé.

[2] Foucault, *Bulletin de la Société philomatique*; 1851 ; et *Travaux scientifiques*. Paris, Gauthiers-Villars ; 1878 ; p. 392.

20cm environ de longueur, il le fixa solidement par une de ses extrémités dans une pièce massive qu'il ajusta sur l'axe d'un tour. L'appareil étant d'abord immobile, il écartait le fil de sa position naturelle et le voyait vibrer, son extrémité décrivant en général une ellipse qui se déformait plus ou moins rapidement suivant la structure du fil; c'est l'expérience de Wheatstone. Mais si, tandis que la figure va ainsi changeant de forme, on met brusquement le tour en marche, on voit aussitôt persister l'espèce de vibration qui a été surprise par le mouvement du tour : cercle, ellipse ou ligne droite, la figure demeure invariable tant que l'arbre roule sur ses coussinets. Arrêtez le tour, les déformations reparaissent. Quand tout sera revenu au repos, lancez le tour; et tandis que la verge attachée à l'arbre tourne sur elle-même, mettez-la en vibration dans un plan quelconque, la vibration restera plane (sans se déformer comme au repos), et le plan de vibration se maintiendra immobile, loin d'être entraîné par le mouvement de l'arbre. Au contraire, plus l'arbre tourne vite, plus le résultat est assuré : savoir la fixité du plan de vibration (55).

III. — COMPOSITION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE ET D'UNE TRANSLATION.

399. Modification de la longueur d'onde par le déplacement de la source ou de l'observateur. — Quand une source vibrante est animée d'un mouvement de translation, on conçoit aisément que les ondes successives sont plus resserrées en avant, plus écartées en arrière, tandis qu'à droite et à gauche elles restent aux mêmes distances que si la source était au repos. La longueur d'onde sera donc diminuée ou augmentée, selon que la source se rapprochera ou s'éloignera.

Formules de Döppler. — Döppler [1], à qui l'on doit cette importante remarque, la compléta par le calcul suivant :

Soient λ la longueur d'onde normale de la vibration émise ;
λ' la nouvelle longueur d'onde;
V la vitesse de propagation du mouvement vibratoire;
u la vitesse de translation de la source.

[1] Döppler, *Abhand. d. k. Böhm. Gesellsch. d. Wissensch.*, (5), II, 465 ; 1842.

Si, pendant la durée τ d'une vibration, la source s'avance de O en O', l'onde, qui était au début en A et qui pendant ce temps τ

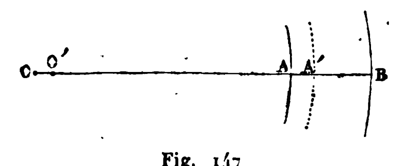


Fig. 147

est venue en B à la distance λ, est remplacée par l'onde A', la longueur AA' étant égale à OO'; de sorte que l'on a

$$\lambda' = A'B = \lambda - u\tau,$$

ou, en remplaçant τ par $\frac{\lambda}{V}$,

$$\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{u}{V}\right).$$

Dans la direction opposée à celle du déplacement, on aura de même

$$\lambda'' = \lambda\left(1 + \frac{u}{V}\right).$$

Perpendiculairement à la ligne OO', la longueur d'onde ne sera pas modifiée.

Si, la source restant fixe, l'observateur se déplace avec la vitesse u, on a semblablement

$$\lambda'_1 = \lambda \frac{1}{1 + \frac{u}{V}},$$

et

$$\lambda''_1 = \lambda \frac{1}{1 - \frac{u}{V}}.$$

400. Mesures de la variation de tonalité provenant du déplacement. — *Expériences de Buys-Ballot, Scott Russel, Vogel.* — Les conséquences précédentes sont faciles à vérifier pour une source sonore.

Les chemins de fer offrent des occasions fréquentes de telles vérifications. Soit par exemple le sifflet d'une locomotive marchant à raison de 50^{km} par heure : c'est une vitesse de 14^{m} à la seconde, 1/24 par conséquent de la vitesse du son. Le sifflet paraîtra donc élevé ou abaissé d'un demi-ton suivant le sens du mouvement. Peu d'années après la publication du mémoire de Döppler, M. Buys-Ballot [1] effectua sur le chemin de fer d'Utrecht à Maarsen quelques expériences qui confirmèrent ces déductions.

Vers la même époque, M. Scott Russell [2] procéda à des mesures du même genre ; on lui doit en outre cette remarque curieuse : le bruit d'un train sous un pont pouvant être considéré, par suite de la réflexion, comme dû à deux trains qui marcheraient en sens inverse avec la même vitesse (que nous supposerons toujours de 50^{km} à l'heure), l'oreille sera désagréablement affectée par une dissonance de seconde. Pour que l'on entendît une tierce, il faudrait une vitesse de plus de 120^{km} à l'heure.

M. Vogel [3] a repris dernièrement les expériences de M. Buys-Ballot et il a fait sur le chemin de fer de Cologne à Minden une série d'observations très soignées d'où il a conclu l'exactitude des formules de Döppler.

Expérience de Fizeau. — La vitesse à imprimer au corps sonore pour que l'altération du son soit sensible n'ayant pas besoin d'être très grande, M. Fizeau [4] entreprit d'étudier le phénomène dans un laboratoire. A cet effet, il construisit un instrument qui est en quelque sorte l'inverse de la roue de Savart, la carte étant portée par la roue tournante, et les dents fixées sur la concavité d'un arc de cercle extérieur et immobile, disposé horizontalement. Pour une certaine vitesse de rotation, l'observateur placé à quelques mètres en arrière de l'appareil entend par exemple *ut*, tandis qu'en avant il entend *mi*, et dans les positions intermédiaires tous

(1) Buys-Ballot, *Pogg. Ann.*, LXVII, 321 ; 1845.
(2) Scott Russell, *Brit. Ass. Reports ;* 1849, pars II, p. 30.
(3) Vogel, *Pogg. Ann.*, CLVIII, 287 ; 1876.
(4) Fizeau, *Bulletin de la société philomatique ;* 1848 ; et plus complètement en 1870, dans les *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XIX, 211.

les sons compris entre ces deux notes. Pour rendre l'expérience plus frappante, on ménage deux arcs dentés semblables, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la roue, et l'on s'arrange de manière que chacun d'eux successivement soit pendant quelques instants frappé seul par la carte. Le mouvement de rotation se trouvant de sens contraire pour les deux arcs, l'observateur percevra successivement les deux sons sans changer de place.

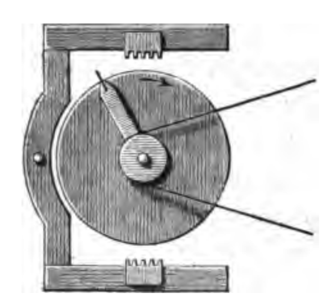


Fig. 148

Sur le même principe M. Mach (1) a établi un appareil consistant essentiellement en un sifflet monté à l'extrémité d'un tube creux qui peut recevoir d'une manivelle un mouvement de rotation rapide. La variation de hauteur est encore très nette, bien que l'appareil soit moins parfait que celui de M. Fizeau.

Expériences par la méthode des battements : Kœnig, Schüngel, Quesneville. — L'emploi des battements fournit à M. Kœnig (2) le moyen de montrer aisément le changement de tonalité d'un diapason qui s'avance ou s'éloigne. Mettant l'un à côté de l'autre deux diapasons, ut_4 et $ut_4 + 4^{vd}$ qui donnent au repos 4 battements par seconde, il rapprochait le plus grave d'environ $0^m,60$ en une seconde; comme $0^m,60$ est sensiblement la longueur d'onde de l'ut_4, l'oreille recevait dans une seconde une vibration double en plus du diapason le plus grave; il y avait donc perte d'un battement. On entendait au contraire un battement de plus quand

(1) Mach, *Pogg. Ann.*, CXII, 58; et CXVI, 333; 1860-62.

(2) Kœnig, *Catalogue illustré* de 1865; et *Quelques expériences*, p. 41. M. Kœnig fait même l'expérience avec un seul diapason, en se mettant devant un obstacle et en déplaçant le diapason perpendiculairement à l'obstacle.

c'était le diapason le plus aigu que l'on rapprochait de l'oreille.

M. Schüngel (¹), puis M. Quesneville (²) ont institué sur ce principe des expériences de mesure qui leur ont paru vérifier complètement les formules de Döppler : le procédé graphique employé par M. Quesneville prête à sa démonstration toute la rigueur désirable.

IV. — RÉSONNANCE.

401. Résonnance. — Tout corps élastique est capable de transmettre un son quelconque. Mais quand les vibrations offertes au corps sont d'accord avec celles qu'il peut exécuter lui-même, au lieu de subir un simple ébranlement atteignant successivement ses différentes parties, il devient le siège d'un mouvement d'ensemble dont l'amplitude est parfois considérable. Sous l'action



Fig. 149

répétée d'impulsions synchrones le corps tout entier vibre à l'unisson des vibrations extérieures : il y a résonnance.

(¹) SCHÜNGEL, *Pogg. Ann.*, CL, 356 ; 1873.

(²) G. QUESNEVILLE, *De l'influence du mouvement sur la hauteur du son*. Paris ; 1879 (Thèse, avec un historique détaillé des travaux antérieurs).

Nous avons déjà constaté la résonnance de l'air d'un tuyau sonore pour les sons de l'embouchure qui correspondent à ses sons propres, la résonnance d'une corde actionnée par une autre corde, par un diapason ou par tout autre instrument, la résonnance d'une membrane sous l'influence d'un son extérieur, etc.

Le phénomène se manifeste nettement avec deux diapasons à l'unisson, montés sur leurs caisses renforçantes se faisant face à plusieurs mètres de distance (¹). Si en effet on ébranle l'un des diapasons à l'archet, l'autre ne tardera pas à vibrer; et, en éteignant avec la main les vibrations du premier, on entendra clairement le son émis par le deuxième.

L'appareil représenté ci-dessus, et dû à Savart, offre un bel exemple de résonnance : sous l'action du tuyau placé en regard, le son du timbre acquiert une ampleur remarquable (²). Inutile d'ajouter qu'il s'éteint beaucoup plus vite.

Ces expériences accusent d'ailleurs une tolérance très variable selon la nature du corps ébranlé. Un diapason, qui pour entrer en vibration réclame une certaine somme d'énergie, et qui, une fois excité, vibre longtemps, ne pourra être mis en mouvement que par une suite d'impulsions rigoureusement d'accord avec ses propres vibrations. Au contraire, une membrane mince ou une corde fine, dont les oscillations s'éteignent rapidement, vibrera sous l'influence de sons assez divers.

402. Transmission des vibrations. — *Transmission par une suite de milieux élastiques.* — En général, le son est transmis au corps résonnant par l'air. Toutefois, la transmission peut aussi s'effectuer par l'intermédiaire de milieux solides ou liquides. On fait ordinairement dans les cours l'expérience suivante : sur la caisse renforçante d'un diapason est placé un verre contenant du

(¹) Au cours des expériences de Regnault, dans l'égout Saint-Michel, M. Kœnig ayant placé deux diapasons ut_2 (128^{vd}) de façon que les ouvertures de leurs caisses fussent en regard des extrémités de l'égout, vit cette influence se manifester très nettement à 1590^{m}.

(²) L'effet est tel que, lorsqu'on n'entend plus du tout le timbre seul, on n'a qu'à lui présenter le tuyau pour faire encore jaillir un son intense. D'après certains auteurs, un verre en forme de cloche peut être brisé par une voix juste et puissante (Chladni, *loc. cit.*, p. 224).

mercure; on attaque le diapason, séparé de sa caisse. Ses vibrations échappent à l'oreille; mais si l'on appuie le diapason sur le mercure, le son éclate aussitôt. Les vibrations du diapason se sont donc communiquées à la colonne d'air intérieure par l'intermédiaire du mercure, du verre et du bois de la caisse.

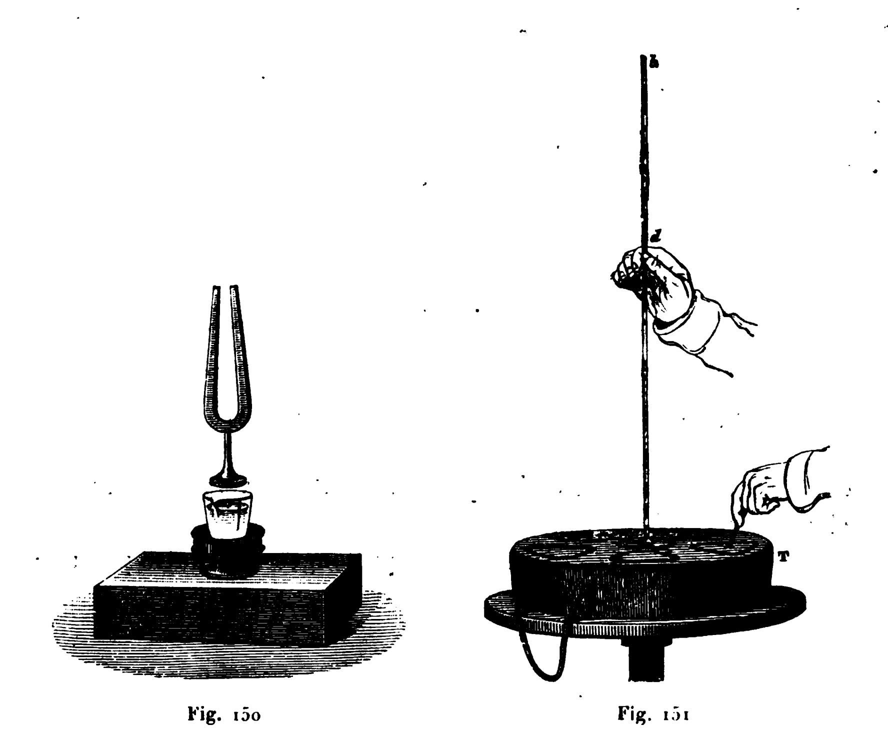


Fig. 150 Fig. 151

Nous rappellerons encore l'exemple curieux de communication offert par le *téléphone à ficelle*.

Transmission par les solides. — La transmission à travers une suite de milieux est un phénomène complexe. Savart a montré que, dans un système formé de pièces solides contiguës, le mouvement vibratoire se transmettait parallèlement à la direction de l'ébranlement.

L'un des moyens que nous avons employés pour exciter les vibrations transversales d'une plaque consistait à faire vibrer suivant sa longueur une verge implantée normalement dans la plaque. Le procédé s'applique à une membrane (fig. 151). On provoquera

de même les vibrations transversales des verges *fg* (fig. 152) en frottant longitudinalement la traverse LG ; au contraire, en attaquant

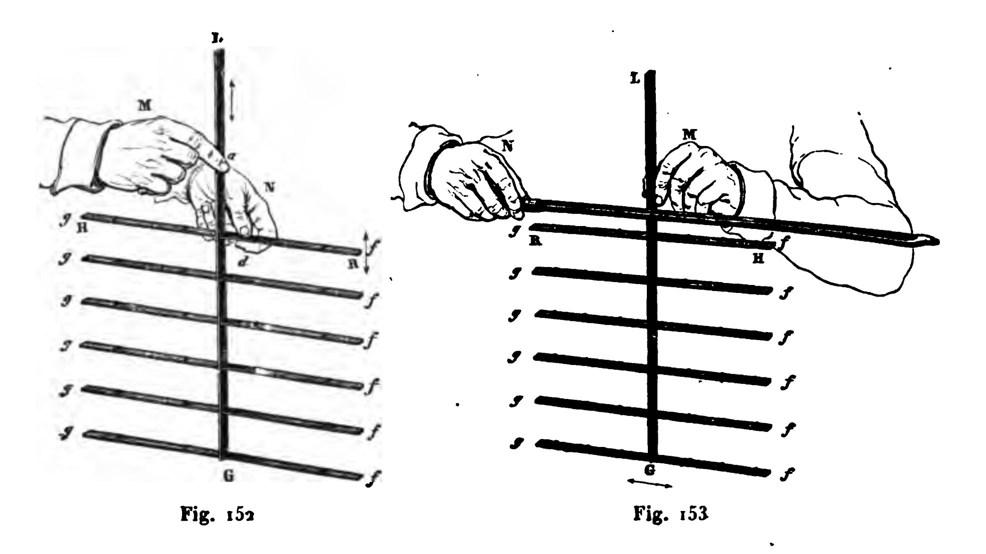


Fig. 152 Fig. 153

celle-ci avec un archet dirigé parallèlement aux verges, on les fait vibrer longitudinalement.

Une verge *da*, fixée d'un bout et prolongée de l'autre par une

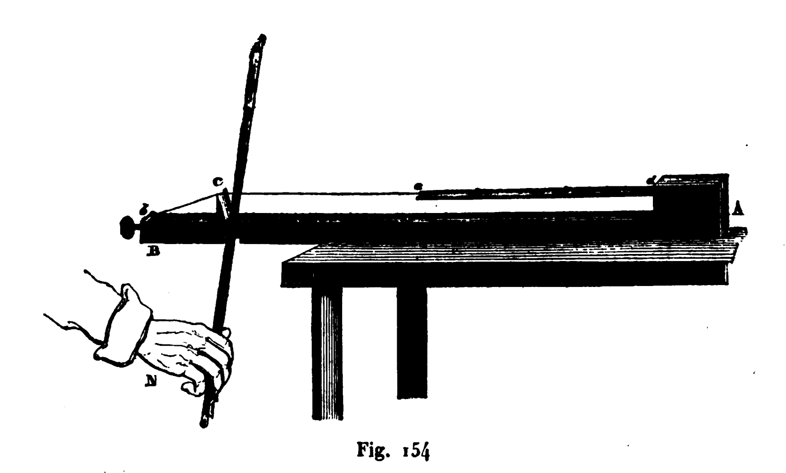


Fig. 154

corde *acb*, offre les divers modes de vibrations figurés ci-contre, quand l'archet qui sert à l'ébranler prend différentes directions dans un plan perpendiculaire à la corde.

En tout cas, les diverses parties du système vibrent à l'unisson.

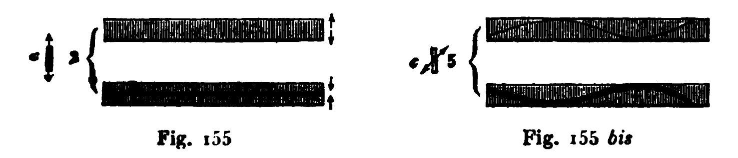


Fig. 155 Fig. 155 *bis*

Mesure de la vitesse des sons dans les corps mous. — M. Warburg [1] a utilisé ce fait pour déterminer la vitesse du son dans les corps mous. A une tige verticale sont fixées horizontalement, comme dans la figure 152, une verge élastique (lame de verre) et une deuxième verge plus petite, faite de la substance à étudier. Soient V et V′ les vitesses du son dans les deux verges; e, e' leurs épaisseurs; l, l' les longueurs des concamérations (mesurées par les distances de deux nodales consécutives) dans les deux verges vibrant synchroniquement, on a

$$\frac{V}{V'} = \frac{l^2}{l'^2}\frac{e}{e'},$$

formule qui donne V′, V étant connu. Pour s'assurer de l'exactitude du procédé, M. Warburg l'a appliqué à la mesure de V′ dans le laiton, et il a retrouvé le nombre de Chladni. Il a pu alors opérer avec confiance sur d'autres corps [2]. Voici les résultats obtenus :

	e'	$\frac{V'}{V}$	$\frac{E'}{E}$	V′
Verre	2,390	1,008	1	5164^m
Stéarine	0,974	0,265	1/35	1368
Parafine	0,908	0,251	1/42	1296
Cire	0,971	0,166	1/88	857
Cire et térébenthine	0,989	0,111	1/197	573
Suif	0,917	0,072	1/461	387

Ces nombres se rapportent à 0°. M. Stefan [3], qui avait entrepris des déterminations du même genre en faisant vibrer longitudinalement une verge composée de deux parties placées bout à bout (la

(1) WARBURG, *Pogg. Ann.*, CXXXVI, 285; 1869.

(2) M. Groth a étudié par ce moyen l'élasticité du sel gemme (GROTH, *Pogg. Ann.*, CLVII, 115; 1876).

(3) STEFAN, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, LVII; 1868.

difficulté était dans le mode de réunion qui ne devait introduire aucune différence de phase), avait trouvé pour la vitesse du son à t° :

Cire....................	$730^m\left(1 - 40\,(t - 20)\right)$
Graisse................	$369\ \left(1 - 40\,(t - 20)\right)$
Caoutchouc...........	30 à 60^m, suivant la tension.

Ces derniers nombres sont de l'ordre de grandeur de la vitesse de propagation d'un ébranlement nerveux, et laisseraient supposer que cet ébranlement se propage par vibrations longitudinales comme le son.

Influence réciproque. — Quand deux horloges, munies de pendules sensiblement égaux, sont appuyées sur une même barre de bois, l'unisson s'établit exactement ([1]). Le fait a été observé par l'horloger anglais Ellicot ([2]), qui a remarqué en outre que, si l'un des pendules marche d'abord seul, il entraîne l'autre et l'amène à osciller à pleine amplitude, tandis qu'il s'arrête lui-même graduellement; puis l'inverse a lieu, et ainsi de suite indéfiniment. Savart a confirmé ces observations et les a étendues aux corps vibrants. Deux cordes semblables, placées l'une à côté de l'autre sur un sonomètre ou mieux sur une caisse de contre-basse, se mettent à l'unisson ([3]) en présentant les mêmes alternances dans les amplitudes de leurs oscillations.

Quand l'unisson existe antérieurement, la réaction du corps influencé réduit le corps influençant à un repos définitif, ou si un état vibratoire commun s'établit, c'est avec une nouvelle période.

Ainsi, dans l'expérience de Melde, le son du diapason excitateur (non entretenu électriquement) s'éteint instantanément quand la corde est à l'unisson exact ([4]). Lorsque la corde est grosse, le sys-

([1]) D'après cette observation, Bréguet avait imaginé de fixer sur une même plaque métallique deux chronomètres qui étaient par conséquent toujours d'accord : les irrégularités individuelles se trouvant ainsi atténuées, leur marche commune était meilleure que celle de chacun d'eux pris séparément.

([2]) Ellicot, *Phil. Trans.*; 1739.

([3]) Il résulte de là que pour accorder exactement deux instruments, il ne faut pas les placer trop près l'un de l'autre, l'unisson pouvant s'établir par une influence étrangère sans que les deux instruments isolés soient au même ton.

([4]) De même, dans l'expérience de Kundt, la colonne d'air ne vibre pas lorsqu'elle est rigoureusement à l'unisson du tube. Hopkins avait déjà signalé

tème vibre en rendant un son plus grave que le son propre de ses deux parties constitutives. Parmi de nombreuses expériences sur ce sujet, M. Gripon [1] rapporte encore celle-ci : une membrane vibre sous l'influence d'un tuyau ; elle est donc à l'unisson. On la place à quelques centimètres de l'orifice : le son du tuyau change aussitôt et devient plus aigu, à moins qu'il ne cesse complètement.

La pratique a montré depuis longtemps qu'il faut ajuster les deux tables d'un violon à des hauteurs différentes pour leur donner le maximum de sonorité. On sait aussi que la caisse de résonnance d'un diapason ne doit pas être exactement accordée à l'unisson du diapason (381).

403. Appareils de résonnance. — *Caisses d'harmonie.* — L'importance même des appareils de résonnance en musique n'est pas à établir. Le son d'une corde isolée étant à peu près nul, la *caisse* d'un violon fait toute la valeur de l'instrument.

Oreille. — L'oreille humaine favorise par sa résonnance les sons voisins du sol_6 : ces sons, que l'on trouve dans le cri du grillon, affectent désagréablement une oreille sensible [2].

Résonnateurs de M. von Helmholtz. — M. von Helmholtz [3] a construit des résonnateurs précieux pour les recherches acoustiques. Ce sont des sphères creuses à deux tubulures opposées, l'une courte et droite s'ouvrant au dehors, l'autre disposée en forme d'entonnoir de manière à pouvoir s'introduire dans l'oreille, où elle se trouve fermée par la membrane du tympan. Le son fondamental de l'appareil, beaucoup plus grave que les autres, est aussi beaucoup plus intense [4].

la difficulté que l'on éprouve à faire vibrer une plaque quand elle transmet ses vibrations à une colonne d'air à l'unisson (355). Terquem a rencontré un phénomène analogue dans les verges (382).

(1) GRIPON, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), III, 343 ; 1874.

(2) Von HELMHOLTZ, *loc. cit.*, p. 146 et 615.

(3) Von HELMHOLTZ, *loc. cit.*, p. 59 et 487.

(4) La longueur d'onde de ce son est donnée par la formule

$$\lambda = 2\pi\sqrt{UR},$$

U étant le volume de la cavité de forme quelconque qui renferme l'air en vibration, et R la *résistance* de l'ouverture, inversement proportionnelle à la capacité électrostatique d'un disque de même surface.

Un résonnateur d'Helmholtz n'est donc pratiquement influencé que par un seul son. Tous les autres sons s'effacent, à l'exception de

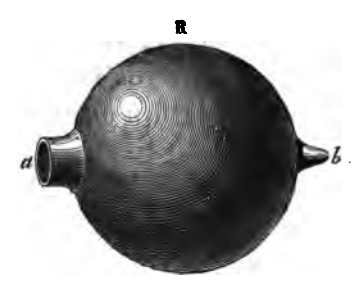


Fig. 156

ce son unique qui, chaque fois qu'il est produit au dehors, éclate dans l'oreille avec une force prodigieuse. On pourra ainsi distinguer un son faible au milieu d'autres plus forts, reconnaître un son résultant, un harmonique qui, faute de ce secours, échapperaient à l'oreille la plus exercée.

CHAPITRE X

INTENSITÉ. — TIMBRE

I. — INTENSITÉ.

404. Intensité mécanique. — *Expression théorique.* — L'effet mécanique d'un mouvement vibratoire pendulaire de période τ et d'amplitude A dans un milieu de densité ρ a pour mesure (357) :

$$I = 2\pi^2 \rho \frac{A^2}{\tau^2}.$$

Cette relation définit entièrement l'intensité mécanique.

Essais de mesure. — Pour comparer deux sources de même hauteur, M. A. M. Mayer[1] place devant chacune d'elles un résonnateur relié par un tube de caoutchouc à l'un des bouts d'un tube en fer à cheval, portant en son milieu une capsule manométrique. Si les deux intensités sont égales, les corps sonores étant à la même distance de leur résonnateur, et les tubes de caoutchouc ayant la même longueur, l'interférence sera complète au milieu du fer à cheval : la flamme de la capsule restera au repos et se présentera, dans le miroir tournant, sous l'aspect d'un ruban lumineux continu. Si les intensités sont inégales, en éloignant l'un des résonnateurs, on diminuera l'action de la source correspondante suivant la raison inverse du carré de la distance jusqu'à rétablir l'équilibre. Ce que nous venons de dire suppose les phases égales ; d'ordinaire elles ne le seront pas ; il faudra d'abord compenser cette inégalité : on commencera donc par modifier la longueur de l'un des

(1) A. M. Mayer, *Dana's and Silliman's American Journal*, (3), V, 123 ; 1873 ; et *Journal de physique*, II, 228 (Angot).

tubes de caoutchouc jusqu'à réduire au minimum les dentelures de la flamme; on pourra alors les faire disparaître complètement en changeant la distance qui sépare l'un des corps de son résonnateur.

Le cas général a été jusqu'ici à peine abordé par l'expérience. Nous devons cependant citer les tentatives faites par lord Rayleigh et par M. Dvorák pour mesurer l'intensité d'une onde sonore par l'action de cette onde sur les corps légers.

Attractions et répulsions acoustiques. — L'appareil de lord Rayleigh [1] est fondé sur ce fait qu'un disque mobile tend à se placer perpendiculairement au sens de la propagation des ondes : un aimant directeur s'opposant à ce mouvement, le disque, suspendu à un fil sans torsion, prendra une position d'équilibre que l'on déterminera par la méthode de Poggendorff.

Dans une étude détaillée des attractions et répulsions qui se produisent au voisinage des corps en vibration, M. Dvorák [2], comme l'avait déjà fait M. A. Mayer [3], a constaté qu'un résonnateur est repoussé par un corps vibrant à l'unisson : ils ont l'un et

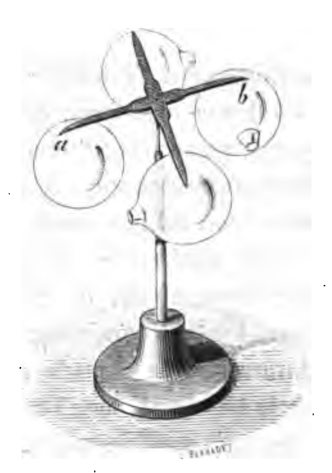


Fig. 157

l'autre construit sur ce principe un *tourniquet acoustique* se composant de résonnateurs *a*, *b*, attachés aux bras d'un petit moulin

(1) Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, (5), XIX, 187; 1882.
(2) DVORÁK, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*; 1875-83.
(3) A. M. MAYER, *Scientific American*; 1876.

très mobile. M. Dvorák ([1]) a trouvé ensuite qu'un simple disque de carton percé de trous coniques était repoussé par un corps sonore situé en regard de la pointe des trous. En conséquence il mesure

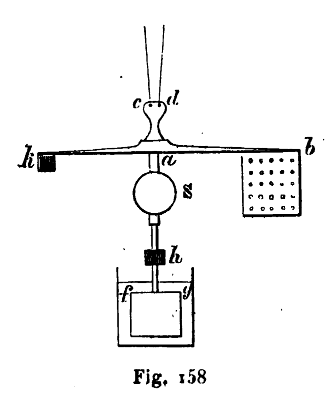


Fig. 158

l'intensité des vibrations de l'air avec une balance de torsion dont le levier *kb*, soutenu par une suspension bifilaire *cd*, porte à l'une de ses extrémités un disque de carton *b* criblé de trous coniques; le système est lesté par un poids *h* et muni d'un amortisseur *fg*; on observe les déviations à l'aide du miroir S.

Le jeu de ces appareils paraît assez compliqué.

405. Intensité physiologique. — *Évaluation approchée.* — On n'a aucun moyen de mesurer les intensités physiologiques des sons. Il est certain cependant que les instruments à clavier produisent à peu près le même effet dans toutes les octaves. D'autre part, Töpfer ([2]) a énoncé ce fait que dans un orgue bien réglé la quantité d'air que consomme chaque tuyau est proportionnelle à la longueur d'onde du son qu'il rend. M. Bosanquet ([3]) a vérifié la loi sur un orgue d'Oxford, suffisamment uniforme dans toute son étendue ; et il en a conclu que le travail moyen T_m, nécessaire pour

([1]) Dvorák, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, III, 127; 1883; et *Journal de physique*, (2), II, 465.

([2]) Tœpfer, *Die Orgel*. Erfurt; 1842.

([3]) Bosanquet, *Phil. Mag.*, (4), XLIV, 381 ; et XLV, 173; 1872-73. La définition de l'intensité a donné lieu à une intéressante controverse entre MM. Bosanquet, Moon et Hudson, *Phil. Mag.*, (4), XLIV et XLV, *passim*; et (5), IX, 174; 1880.

produire des sons de même intensité, est proportionnel à leur longueur d'onde : $\frac{T_m}{\lambda}$ peut donc être pris pour mesure de l'intensité apparente I_a. Par suite, comme T_m [1] est égal à I, on a

$$I_a = K\frac{I}{\lambda}:$$

[1] Ce travail est facile à obtenir directement. On peut encore l'évaluer par la dépense d'énergie nécessaire pour amener à l'état vibratoire une longueur λ d'air pris au repos. L'énergie requise à cet effet se compose de deux parties : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique, ou force vive actuelle, est

$$C = \int_x^{x+\lambda} \frac{1}{2}\rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx.$$

Pour évaluer l'énergie potentielle P, considérons un disque d'air de section égale à l'unité et d'épaisseur dx. Supposons qu'il soit comprimé de telle sorte que, la section restant la même, l'épaisseur devienne $dx - du$. L'accroissement de pression à l'intérieur du disque est alors $E\frac{du}{dx}$. Quand l'épaisseur varie de δdu, l'élément de travail est $E\frac{du}{dx}\delta du$; par conséquent, le travail effectué dans la compression entière de $du = 0$ à $du = du$ est

$$\int_0^{du} E\frac{du}{dx}\delta du = \frac{1}{2}E\frac{(du)^2}{dx};$$

et le travail accumulé dans tous les disques composant la colonne de longueur λ se représente par

$$P = \int_x^{x+\lambda} \frac{1}{2}E\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Ces deux quantités C et P sont égales, en vertu des relations connues

$$\frac{du}{dt} = -V\frac{du}{dx} \qquad \text{et} \qquad E = \rho V^2.$$

On a donc pour l'énergie totale

$$\int_x^{x+\lambda} \rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx,$$

ou, en posant toujours $u = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$,

$$\int_x^{x+\lambda} \rho\frac{4\pi^2}{\tau^2}\sin^2\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) dx = 2\pi^2\rho\frac{A^2}{\tau^2}\lambda.$$

Ainsi l'énergie moyenne de l'unité de volume de l'air vibrant est

$$T_m = 2\pi^2\rho\frac{A^2}{\tau^2} = I.$$

l'*intensité apparente* est proportionnelle à l'énergie et en raison inverse de la longueur d'onde.

En se reportant à l'expression de I, on voit que cette relation équivaut à celle-ci

$$I_a = h\frac{a^2}{\lambda^3}:$$

pour des sons d'égale intensité apparente, les carrés des amplitudes sont proportionnels aux cubes des longueurs d'onde.

Sensibilité de l'oreille. — Si l'on ne possède actuellement encore aucun *phonomètre*, ce n'est point à cause d'un manque de sensibilité de l'oreille. L'amplitude des vibrations sonores peut en effet devenir extrêmement petite sans que le son cesse d'être perceptible.

Lord Rayleigh [1] a fait sur ce sujet l'expérience suivante : un sifflet, sonnant fa_6 (2730^{vd}) sous l'action d'un courant d'air dont le débit était de 196^{cm^3} par 1^s sous la pression de $9^{cm},5$ d'eau, s'entendait jusqu'à la distance de 820^m.

Le travail dépensé en 1^s pour faire parler le sifflet était

$$T = 9,5 \times 196,$$

l'unité de travail étant le travail nécessaire pour élever 1^{cm^3} d'eau à la hauteur de 1^{cm}.

D'autre part, la quantité totale d'énergie qui traverse pendant 1^s la surface d'une sphère de rayon R tracée autour du centre d'ébranlement est

$$2\pi^2 R^2 \rho \frac{A^2}{\tau^2} V.$$

On a donc, en remplaçant les lettres par les valeurs numériques correspondant à l'expression actuelle,

$$A = \sqrt{\frac{9,5 \times 196 \times 981}{2\pi^2 \times \overline{82000}^2 \times 0,0013 \times 34000 \times \overline{2730}^2}} = 0^{cm},000\,000\,081.$$

(1) Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, (5), III, 456 ; 1877.

Une partie notable du travail étant nécessairement perdue, l'amplitude des vibrations qui agissaient sur l'oreille de l'observateur était certainement très inférieure à un millionième de millimètre.

M. Pellat ([1]) a calculé que la quantité de chaleur abandonnée par 1^{gr} d'eau qui se refroidit de 1°, transformée en énergie électrique et lancée dans un bon téléphone, y produirait un son nettement perceptible pendant dix mille ans.

II. — TIMBRE.

406. Décomposition d'un son complexe en ses éléments suivant le théorème de Fourier. — *Rameau, Monge, Ohm, von Helmholtz.* — D'après le théorème de Fourier (393), un mouvement périodique quelconque est, toujours et d'une seule manière, décomposable en mouvements pendulaires de périodes respectivement égales à la période du mouvement proposé, à la moitié, au tiers, au quart... de cette période.

Cette décomposition s'opère-t-elle réellement en acoustique?

Ohm ([2]) avança qu'en effet l'oreille décompose tout mouvement périodique de l'air en vibrations harmoniques correspondant chacune à un son simple. La proposition semble au premier abord contredite par l'expérience journalière. Enclins à remarquer dans un son ce qui le différencie des autres sons de même hauteur, nous sommes accoutumés à fondre les harmoniques avec le son fondamental en un tout que nous qualifions par son timbre. Mais les éléments deviendront séparément perceptibles si nous y appliquons notre attention.

Les sons des cordes se prêtent particulièrement à ces observations. Que l'on émette successivement un harmonique, puis aussitôt le son complexe contenant cet harmonique, l'oreille discernera aisément le son simple dans le mélange. Par ce moyen, M. von Helmholtz

([1]) Pellat, *Journal de physique*, X, 358; 1881.

([2]) Ohm, *Pogg. Ann.*, LIX, 513 et LXII, 1 ; 1846-47. Seebeck, qui n'avait pas recours aux méthodes décrites plus bas pour diriger l'attention de l'oreille sur les sons en question, nia le fait (Seebeck, *Pogg. Ann.*, LX, 449 et LXIII, 353 et 368; 1847-48).

a distingué les harmoniques jusqu'au seizième. Il a même pu les faire saisir aisément aux personnes les moins exercées. En appuyant plus ou moins fortement un pinceau au point convenable de la corde, on produisait tel harmonique que l'on voulait, pur ou mêlé en proportion décroissante avec le son fondamental, de façon à ménager une série de transitions par lesquelles l'oreille arrivait à suivre l'harmonique jusque dans le son ordinaire de la corde vibrant librement.

Un peu d'habitude permettra vite d'entendre les harmoniques des divers instruments et même ceux de la voix humaine, bien que ces derniers soient plus difficiles à séparer; et cependant Rameau [1] les avait déjà reconnus sans aucun secours étranger.

La sûreté de l'oreille dans cette analyse est d'ailleurs prouvée par ce fait qu'elle ne perçoit que les sons réellement existant. Ainsi, dans le son d'une corde ébranlée par percussion l'oreille n'indiquera jamais ceux des harmoniques dont Young a établi l'absence (369).

M. von Helmholtz, qui a mis tous ces faits en lumière dans son livre célèbre, *die Lehre der Tonempfindungen*, a montré que chacun des sons simples constituants peut être isolé de la masse sonore par un moyen purement mécanique, la vibration par influence des corps élastiques. « Chaque son simple existe donc dans le son complexe, produit par un instrument quelconque, aussi bien et au même titre que le rayon simple existe dans la lumière blanche émanant du soleil ou de tout autre corps incandescent. »

L'analyse des sons [2] par influence s'effectue facilement à l'aide d'un piano dont (les étouffoirs étant soulevés) chaque corde décèle par ses trépidations le son qu'elle est elle-même capable de donner. Peut-être a-t-on dans cette expérience la reproduction exacte du mode d'analyse par l'oreille (409).

[1] Rameau, *Nouveau système de musique théorique* (préface). Paris; 1726.

[2] Il importe de remarquer que cette analyse ne s'applique qu'au son continu et laisse de côté les caractères provenant du mode de production (sifflement de l'air dans une embouchure, grincement de l'archet, choc d'un marteau...), ou du mode de variation (tantôt la note éclate brusquement, tantôt au contraire elle s'enfle progressivement; elle s'éteint lentement, ou elle est subitement étouffée), tous caractères qui dans la pratique nous aident puissamment à reconnaître le son.

Mais on emploiera de préférence les résonnateurs d'Helmholtz, associés soit à l'oreille soit aux capsules de Kœnig comme l'indique la figure ci-jointe. Appliquée aux systèmes dont les vibrations sont définies mathématiquement (cordes, tuyaux sonores,

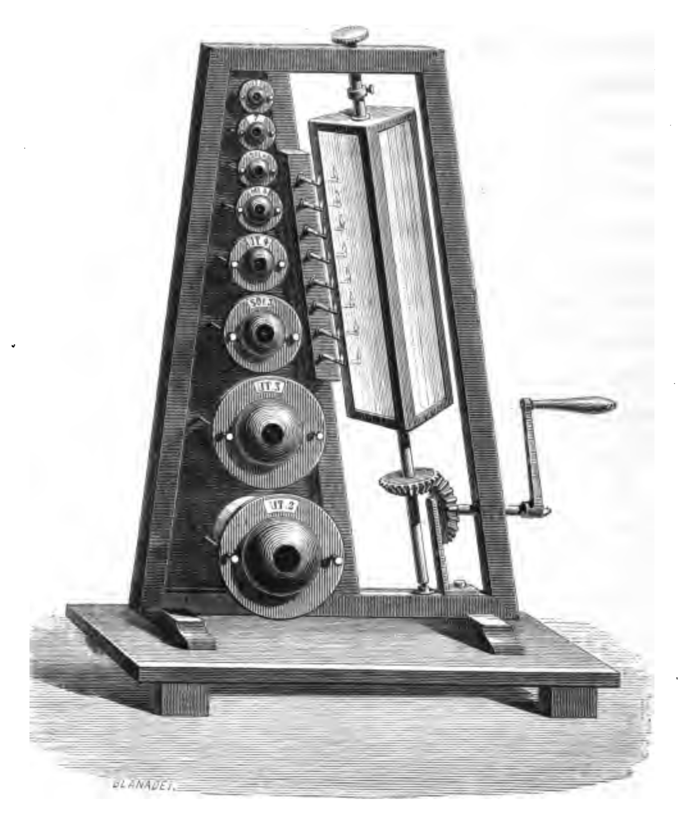


Fig. 159

verges, etc.), cette décomposition, d'accord avec celle qui est produite par l'oreille, confirme entièrement ce que nous savons *a priori* sur le mode de vibration du système considéré.

En étendant ces méthodes aux divers instruments, on reconnaît qu'un son musical est d'ordinaire complexe. Un son simple, tel que celui d'un diapason sur sa caisse d'harmonie, semble creux et plus bas qu'il n'est réellement. Les grands tuyaux bouchés de l'orgue, qui, avec peu de vent émettent des sons presque entièrement dépourvus d'harmoniques, produisent un

effet sombre et triste. Les sons de la flûte, à harmoniques peu nombreux et faiblement perceptibles, ont beaucoup de pureté, de douceur, et quelque monotonie. Si l'on compare sur la même note une flûte et une belle voix humaine, dans laquelle le son fondamental accompagné de ses six premiers harmoniques forme un accord vigoureux, on sent aussitôt l'influence de ces harmoniques. De longue date les facteurs d'orgues ont été amenés à compléter ainsi les sons pâles ([1]) des grands tuyaux par les *jeux de fourniture*, au moyen desquels interviennent les six premiers termes de la série, ceux-là mêmes qui constituent l'accord parfait. Dans le piano, le choc du marteau tombant entre le 1/7 et le 1/9 de la longueur introduit précisément ce même cortège d'harmoniques qui prête au son de l'éclat, sans l'acuité, la strideur que donnent les harmoniques élevés (violon, clairon...).

Tous ces faits, et bien d'autres qu'il nous faut omettre ont amené M. von Helmholtz à cette conclusion que *le timbre d'un son résulte du nombre et de l'intensité des harmoniques unis au son fondamental.* Cette idée s'était déjà présentée à plus d'un esprit : Monge l'avait formulée très exactement ([2]); M. von Helmholtz en a établi les preuves par l'analyse et par la synthèse.

407. Synthèse des sons musicaux. — On peut, en effet, confirmer par la synthèse les résultats de l'analyse. Qu'une clarinette lance une note quelque peu prolongée devant un piano ouvert dont les étouffoirs sont levés, les cordes influencées par chacun des sons simples contenus dans le son complexe de l'instrument résonneront par influence avec assez de force pour continuer exactement ce son quand il aura cessé. M. von Helmholtz

([1]) Les Allemands appellent le timbre *Klangfarbe* (couleur du son).

([2]) MONGE, d'après SURREMAIN-MISSERY, *Théorie acoustico-musicale*. Paris, Didot; 1793. « Je sais bien que j'ai ouï dire par M. Monge, de l'Académie des sciences, que ce qui déterminait tel ou tel timbre, ce ne devait être que tel ou tel ordre et tel ou tel nombre de vibrations des parties aliquotes de la corde qui produit un son de ce timbre-là..... C'était bien cela qu'entendait M. Monge, car il ajoutait que si l'on pouvait parvenir à supprimer les vibrations des aliquotes, toutes les cordes sonores, de quelques différentes natures qu'elles fussent, auraient sûrement le même timbre. » (RÉSAL, *C. R.*, LXXIX, 821; 1874).

a construit un appareil, qui se compose d'une suite de diapasons accordés suivant la série harmonique, entretenus électriquement, et munis chacun d'une caisse de résonnance que l'on peut ouvrir plus ou moins au moyen d'un mécanisme commandé par un clavier. Chaque diapason émettant avec l'intensité voulue l'un des sons simples décelés par l'analyse, l'ensemble reproduit effectivement le son complexe étudié. On imite ainsi très bien le son du cor et même les sons de la voix humaine (avec lesquels on peut également faire l'expérience du piano). Une expérience intéressante due à M. A.-M. Mayer ([1]) consiste à relier un point de la membrane latérale d'un tuyau à anche ([2]) avec une série de diapasons harmoniques par autant de fils fins convenablement tendus : chaque diapason choisit dans le mouvement complexe de la membrane le mouvement pendulaire auquel il peut répondre et, entrant lui-même en vibration, manifeste l'existence et jusqu'à un certain point la quantité de cet élément. Le même appareil donne la synthèse du son étudié ; car, si l'on cesse de faire parler le tuyau, les diapasons continuent à vibrer quelque temps encore, et la superposition des mouvements qu'ils communiquent à l'air et à la membrane du tympan reproduit sensiblement le son du tuyau.

408. Rôle de la phase. — Le timbre d'un son musical étant défini par le nombre et l'intensité des sons simples en lesquels il est décomposable d'après le théorème de Fourier, la phase ne semble pas devoir intervenir. C'est en effet ce qui a lieu d'après M. von Helmholtz : « Les différences des timbres musicaux dépendent de la présence et de l'intensité des sons partiels, mais non de leurs différences de phases. » Cette proposition, confirmée par divers expérimentateurs ([3]), a été attaquée par M. Kœnig ([4]); mais son procédé consistant à faire défiler une sinussoïde indéfinie devant une fente d'une certaine largeur par laquelle sort un

([1]) A.-M. Mayer, *American Journal of sciences and arts* (3), VIII, Aug. et Sep.; 1874; et *Journal de physique*, IV, 184 (Maurat).

([2]) On opérerait de même sur la membrane du phonautoscope (331) mise en vibration par une influence quelconque.

([3]) Voir en particulier le travail de M. Schneebeli sur les voyelles.

([4]) Kœnig, *Wied. Ann.*, XIV, 369; 1881 ; et *Quelques expériences*, 218.

courant d'air, ne garantit pas suffisamment la simplicité du son pour que l'on puisse admettre l'interprétation qu'il donne de phénomènes intéressants d'ailleurs.

409. Mécanisme de l'audition ([1]). — Pour terminer ce sujet, il nous reste à indiquer comment on peut se rendre compte de la faculté que possède l'oreille de décomposer les mouvements de l'air en vibrations pendulaires.

L'organe essentiel de l'audition des sons musicaux paraît être la *membrane basilaire*, constituée par des fibres parallèles dont la longueur croît dans le rapport de 1 à 12 depuis la base jusqu'au sommet du *limaçon*. Sur ces fibres s'appuient les *piliers de Corti*, contre lesquels sont placées des *cellules ciliées* en rapport avec les terminaisons du nerf acoustique.

M. von Helmholtz admet que chaque fibre est accordée pour un son différent; et comme il y en a au moins six mille, le clavier basilaire est à même de répondre par une corde distincte à chacun des sons simples de l'échelle musicale. Il faut comprendre d'ailleurs que chaque fibre n'est pas strictement affectée à une note; elle est seulement influencée d'une façon particulière par cette note (401). D'après la faculté d'étouffement que doit posséder

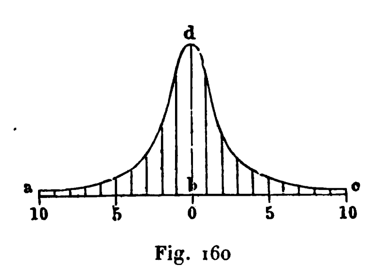


Fig. 160

l'oreille pour saisir nettement des trilles de dix notes à la seconde, M. von Helmholtz estime que l'intensité de la vibration excitée dans une fibre auditive par un son distant d'un demi-ton du son propre de cette fibre est encore le 1/10 de l'intensité relative à l'unisson absolu. La figure 160 donne une idée de la loi sui-

([1]) Pour l'étude des organes de l'ouïe et de la voix, consulter l'*Acoustique biologique* de M. Gavarret (Paris, Masson; 1877), ouvrage auquel nous avons emprunté un grand nombre de nos figures.

vant laquelle diminue alors l'intensité de la vibration par influence quand la différence de hauteur augmente : *ab* et *bc* désignent chacun l'étendue d'un ton entier ; *bd* est l'intensité maximum, relative à l'unisson absolu avec le son excitateur. La même courbe montre l'intensité des battements produits dans l'oreille par deux sons différents de la gamme ; seulement alors 5 divisions représentent un ton entier, puisque la distance des deux sons est le double de la distance de chacun d'eux à la fibre moyenne : *i* étant l'intensité correspondant à l'abscisse ainsi déterminée, les deux sons battront avec une intensité qui variera de o à $4i$.

410. Voix humaine voyelles. — L'organe de la voix humaine est une anche membraneuse (364), surmontée de cavités (pharynx, bouche, nez) constituant un résonnateur de forme et de dimensions variables.

Les sons produits par cet organe se partagent communément en voyelles et consonnes.

Les voyelles peuvent se grouper ainsi, suivant leurs affinités :

A
O *É*
EU
OU *I*
U

Si on les soumet à l'analyse, on constate en général six ou huit harmoniques perceptibles, mais d'intensités très variables selon la voyelle émise. Pour chaque voyelle, la bouche prend en effet une forme déterminée, et par suite elle renforce certain son. Ce renforcement, que découvrit Donders [1] (en prononçant les voyelles à voix basse), a été vérifié par M. von Helmholtz : la bouche étant disposée pour prononcer une voyelle, il en approchait tour à tour divers diapasons, et remarquait ceux dont le son était particulièrement renforcé [2]. Il a déterminé ainsi les sons propres ou *vocables* des différentes voyelles :

[1] DONDERS, *Archiv für die Höllandische Beiträge*, I, 157. Berlin ; 1858.

[2] Citons encore le procédé de M. Auerbach, qui frappe avec le doigt sur sa bouche préparée pour la voyelle dont il veut déterminer le vocable.

OU	*O*	*A*	*EU*	*U*	*É*	*I*
fa_2	$si_3\flat$	$si_4\flat$	$ut_5\sharp$	sol_5	$si_5\flat$	$ré_6$
			fa_3	fa_2	fa_3	fa_2.

Pour plusieurs voyelles il y a deux sons propres correspondant l'un au fond, l'autre à l'entrée de la bouche disposée alors en forme de bouteille à goulot plus ou moins long.

D'après M. Kœnig, qui a répété avec soin ces expériences, les notes fixes caractéristiques de l'*OU* et de l'*I* seraient $si_2\flat$ et $si_6\flat$, de façon que l'on aurait la série très simple :

OU	*O*	*A*	*É*	*I*
$si_2\flat$	$si_3\flat$	$si_4\flat$	$si_5\flat$	$si_6\flat$.

Ces déterminations sont fort difficiles, les quantités à étudier étant essentiellement changeantes. En réalité, une voyelle est très mal définie par une lettre, qui désigne des sons différents chez les différents peuples, chez les différentes personnes, chez une même personne dans différentes circonstances : la véritable définition serait précisément le timbre.

Malgré ces difficultés, M. von Helmholtz admet que pour chacune des voyelles la cavité buccale présente une résonnance déterminée, indépendante de la hauteur à laquelle la voyelle est émise ; de sorte que la bouche renforce dans le son des cordes vocales tous ceux des harmoniques qui coïncident avec l'un de ses sons propres ou qui en sont tout au moins assez voisins, tandis qu'elle étouffe plus ou moins les autres.

Cette théorie est confirmée par la prédilection de chaque voyelle pour certaines notes (celles qui avoisinent le son propre, l'octave basse ou la douzième basse de ce son).

Ainsi l'*OU*, dont la note caractéristique est fa_2, se produit le plus facilement sur les notes fa_2 et ses voisines mi_2 et $ré_2$, ainsi que sur fa_1.

L'*É*, dont l'une des caractéristiques est fa_3, convient au fa_3 et aux notes légèrement supérieures jusqu'au mi_3, de même qu'aux sous-harmoniques du fa_3, c'est-à-dire au fa_2 et au $si_1\flat$. Bien que par sa deuxième caractéristique il touche aux registres élevés, c'est princi-

palement, avec l'*OU*, la voyelle des basses (qui vont communément du fa_1 au $ré_3$).

Les voix de soprano (si_2 — sol_4 [1]) se complaisent aux sons *O*, *A* : aussi la langue italienne, si riche en ces terminaisons, prête-t-elle à ces voix un charme tout spécial.

L'influence du son caractéristique est surtout frappante pour les notes placées aux limites du registre vocal. Une voix de femme qui veut émettre une note plus grave que l'ut_3 tourne nécessairement à l'*O* ou à l'*OU*; de là cet accent sourd particulier à la voix de contralto (mi_2 — ut_3). Tous les chanteurs connaissent par expérience l'affinité de certaines voyelles pour certaines notes, et savent en tirer parti à l'occasion [2].

Willis [3], dont les travaux ont conduit Wheatstone [4] à poser le premier la théorie des voyelles, avait essayé de reproduire les sons de la voix avec des anches à tubes résonnants de longueur variable, et il y avait en effet assez bien réussi [5].

M. von Helmholtz a employé au même usage son appareil (407), comprenant les diapasons suivants (les quatre derniers, ajoutés après coup, étaient peu sonores) :

$si_1\flat$	$si_2\flat$	fa_3	$si_3\flat$	$ré_4$	fa_4	la_4	$si_4\flat$	$ré_5$	fa_5	$la_5\flat$	$si_5\flat$
1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16.

Le son fondamental de cette série formait un *OU* très sourd, qui se rapprochait davantage de l'*OU* parlé lorsqu'on y joignait doucement les sons 2 et 3. On obtenait un très bel *O* en donnant, outre le son fondamental un peu étouffé, le son 4 fort et les sons 2, 3 et 5 plus faibles. On produisait l'*A* en faisant sortir aussi vigoureusement que possible les sons les plus élevés de la série à partir du 5e et légèrement les autres. L'appareil donnait encore l'*É* quand on

(1) Nous parlons des voix ordinaires, car certaines basses descendent au fa_{-1} de 43^{vd}, tandis que quelques soprani montent à l'ut_6 de 2100^{vd}.

(2) Laugel, *La voix, l'oreille et la musique*. Paris, Germer-Baillière; 1867, p. 58.

(3) Willis, *Cambridge Phil. Trans.*, III, 231; 1833.

(4) Wheatstone, *London and Westminster Review*, oct. 1837.

(5) M. Faber, de Vienne, a construit sur le même principe une machine parlante dans laquelle les voyelles sont obtenues par l'emploi de diverses ouvertures communiquant avec une cavité spéciale. Un certain nombre de pièces, imitant le jeu des dents, des lèvres et de la langue, permettent de produire les consonnes. Le résultat est satisfaisant (*Journal de physique*, VIII, 274; 1872 (Gariel)).

renforçait le son 3, mais il ne permettait pas d'atteindre jusqu'au son caractéristique de l'*I*.

Depuis ces remarquables travaux de M. von Helmholtz, la question a été maintes fois reprise.

Le récepteur habituel des mouvements vibratoires, la membrane a été utilisée sous toutes ses formes et de toutes les manières pour l'étude de la voix humaine.

En parlant dans une embouchure reliée à une membrane agissant sur un style (logographe de Barlow [1]), phonautographe de Schneebeli [2]) ou sur une flamme manométrique (Kœnig [3])), on a

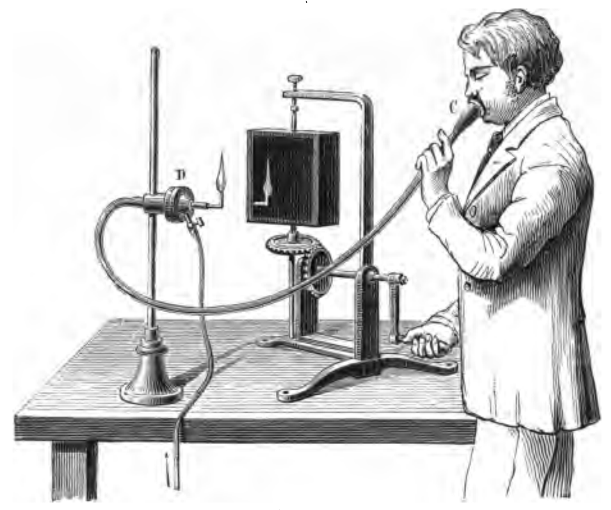


Fig. 161

obtenu les figures relatives aux diverses voyelles à différentes hauteurs, et même l'indication de certaines consonnes [4]. La plaque d'un téléphone, disposée de manière à former le fond d'une capsule manométrique (Fröhlich [5])), fait prendre à la

(1) Barlow, *Proceedings of the Royal Society;* 1874; et *Journal de physique*, VIII, 78.

(2) Schneebeli, *Archives de Genève* (2), CXIV, 79; et (3), I, 149; 1878-79.

(3) Kœnig, *Pogg. Ann.*, CXLVI, 161; 1872; et *Quelques expériences*, 56.

(4) Ainsi l'*R* muet (que l'on peut prolonger indéfiniment sans voyelle), produit dans la flamme une sorte de hérissement; le *B* et en général les explosives se marquent au logographe par un saut brusque.

(5) Frœhlich, *Handbuch d. Elektricität u. d. Magnetismus*, 291. Berlin, Springer; 1887.

flamme des apparences du même genre, bien qu'un peu plus compliquées. L'analogie se poursuit avec les tracés phonographiques, comme le montre le dessin ci-joint, dans lequel

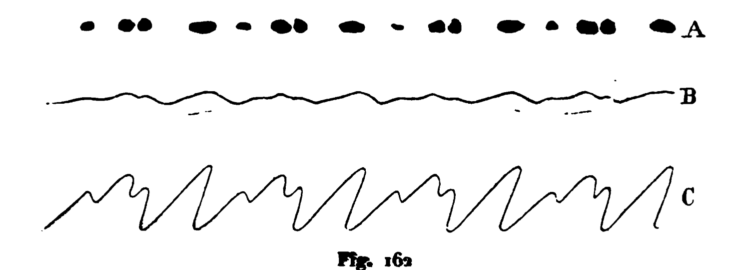


Fig. 162

M. A.-M. Mayer [1] a réuni, en A l'impression produite sur la feuille d'étain par l'*A*, en B la coupe transversale de cette feuille et en C le profil de la flamme manométrique impressionnée par la même voyelle. Sous le nom de phonéidoscope, M. Sedley

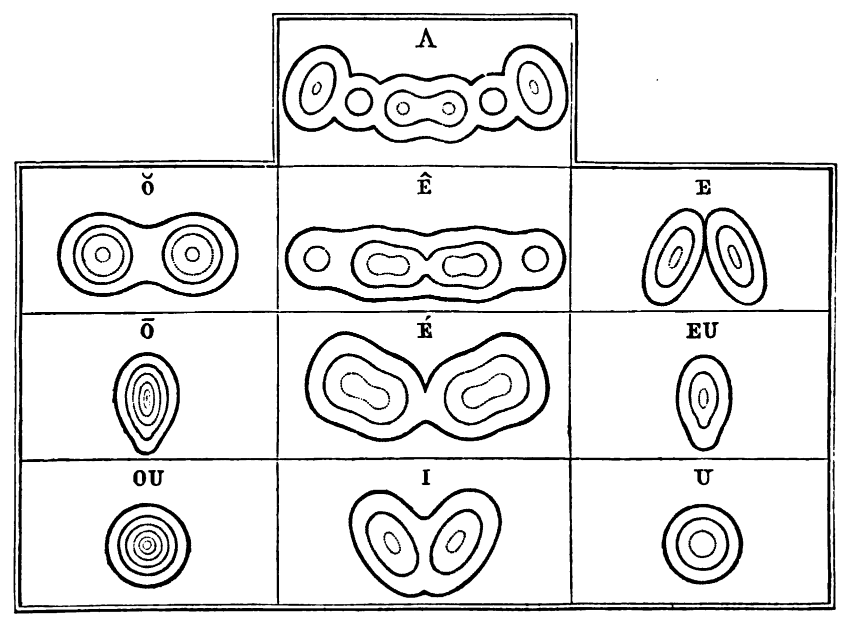


Fig. 163

Taylor [2] a construit un appareil permettant d'étudier l'effet des

(1) A.-M. Mayer, *Journal de physique*, VII, 113; 1878.
(2) Sedley Taylor, *Journal de physique*, VIII, 92; 1879.

voyelles sur les lames liquides minces. M. Guébhard (1) a effectué l'expérience sous une forme très simple et très ingénieuse : il suffit d'émettre les diverses voyelles au-dessus de la surface fraîchement nettoyée d'un mercure très impur, pour obtenir, par la condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'haleine, les curieux diagrammes ci-contre.

Les résultats de toutes ces recherches coïncident en général avec la théorie de M. von Helmholtz. Cependant cette théorie, attaquée dès le début par M. von Quanten (2), n'est pas admise par tous les physiciens.

D'après M. Grassmann (3), les trois voyelles *OU*, *U*, *I* constituent une première série caractérisée par la présence d'un seul harmonique, inférieur à ut_3 pour *OU*, à mi_4 pour *U*, et sans limite pour *I*. La voyelle *A* répond à une nombreuse suite d'harmoniques, d'intensités presque égales. Enfin, *O*, *EU*, *É* peuvent être considérés comme résultant de la superposition de l'*A* et de l'une des voyelles du premier groupe :

$$O = A + OU \qquad EU = A + U \qquad \acute{E} = A + I.$$

A l'appui de cette théorie, on citera les expériences de M. Schneebeli et celles de M. Lahr (4).

Ayant relevé les courbes marquées à son phonautographe par l'*O* sur les notes mi_3, sol_3, ut_4 et mi_4, M. Schneebeli chercha à les décomposer en sinussoïdes élémentaires, d'après le principe de Fourier : à cet effet, il divisa la période en vingt-quatre parties égales, mesura les ordonnées correspondantes, puis, écrivant que chacune était la somme des ordonnées des six premières sinussoïdes, il détermina les grandeurs de ces ordonnées, d'où il conclut les intensités relatives des six premiers harmoniques (les intensités sont proportionnelles aux carrés des amplitudes et des nombres de vibrations respectifs) ; il trouva ainsi que le timbre de la voyelle *O* est caractérisé non par le renforcement d'un son fixe, toujours le

(1) Guébhard, *Journal de physique*, IX, 242 ; 1880.
(2) Von Quanten, *Pogg. Ann.*, CLIV, 272 ; 1875.
(3) Grassmann, *Wied. Ann.*, I, 606 ; 1877.
(4) Lahr, *Wied. Ann.*, XXVIII, 94 ; 1886.

même quel que soit le son fondamental, mais par la prédominance constante de l'octave.

M. Lahr, reprenant la question, a répété d'abord les expériences de M. von Helmholtz sur la résonnance de la cavité buccale, ainsi que sur la synthèse des voyelles au moyen des diapasons, puis il a eu recours au phonographe. Déjà MM. Fleeming Jenkin et Ewing (¹) avaient appelé l'attention sur les phénomènes que l'on provoque en tournant plus ou moins vite l'appareil quand on lui fait reproduire la parole. M. Lahr observe que si l'on a émis un *OU* en face du phonographe marchant à une allure moyenne, l'appareil redonne d'abord un *OU* qui, par une vitesse plus grande, se change en *U* et même en *I* si la vitesse atteint une valeur suffisante. Pareillement, *O* devient *EU*, puis *È*, par un accroissement convenable de vitesse. D'autre part, M. Lahr, amplifiant les tracés obtenus sur la feuille d'étain et les analysant comme M. Schneebeli, arrive à des résultats d'accord avec la théorie de M. Grassmann. Il conclut donc également que, vu la nature, le nombre et l'intensité des sons constitutifs, les voyelles sont aussi compliquées que les couleurs.

Sans doute ces expériences n'échappent pas à toute critique, et M. Auerbach (²) a pu trouver réponse aux contradicteurs de M. von Helmholtz. Il est certain que les conditions de résonnance d'une membrane et surtout d'une membrane métallique ne sont pas identiques à celles d'une masse d'air. On peut tenir pour suspectes en semblable matière les indications d'appareils aussi imparfaits, au point de vue du timbre, que le téléphone et le phonographe. Néanmoins, la question semble plus compliquée actuellement qu'au lendemain du jour où parut le livre de M. von Helmholtz.

411. Théorie de la consonnance. — *Théories anciennes : Pythagore, Sauveur, Euler, Rameau.* — Toute consonnance est caractérisée par un rapport simple entre les nombres des vibrations des deux sons en présence (353) : plus le rapport est simple, plus la consonnance est parfaite.

(¹) JENKIN et EWING, *Nature*, XVIII, 340 et 394 ; 1878.

(²) AUERBACH, *Pogg. Ann.*, *Ergänz-Band*, VIII, 177 ; et *Wied. Ann.*, III et IV, *passim* ; 1878.

Les Pythagoriciens, que leurs mesures avaient amenés intuitivement à ce fait, le rattachaient à leur grande loi de l'harmonie universelle.

Partant de ce principe que « l'âme par sa nature aime en même temps et les perceptions simples parce qu'elles ne la fatiguent point et les perceptions variées parce qu'elles lui épargnent l'ennui de l'uniformité », Sauveur [1] expliquait le charme des accords par les coïncidences des pulsations à intervalles réguliers et très courts. Aux coïncidences se produisant toutes les vibrations, toutes les deux vibrations, toutes les trois vibrations, correspondent l'unisson, l'octave, la douzième ou la quinte. Quand les rencontres n'ont lieu que toutes les cinq ou six vibrations, comme dans les tierces, les perceptions sont moins simples, mais cependant encore agréables à cause de leur variété. Au delà, elles cessent de plaire. A plus forte raison, les battements sont-ils désagréables. « On trouve en effet que les accords dont on ne peut entendre les battements sont justement ceux que les musiciens traitent de consonnances et que ceux dont les battements se font sentir sont les dissonances; quand un accord est dissonance dans une certaine octave et consonnance dans une autre, c'est qu'il bat dans l'une et ne bat pas dans l'autre. » D'ailleurs, le terme de l'agrément des accords serait moins fixé par la nature que par l'usage, ce qui rendrait compte de la divergence des goûts musicaux chez les différents peuples.

Quelques-unes de ces idées se retrouveront dans la théorie métaphysique d'Euler [2] : « la consonnance est la sensation agréable résultant de la perception de l'ordre sans fatigue de l'esprit » ; d'autres, dans la théorie physique de M. von Helmholtz ; tandis que le principe de la coïncidence des pulsations est peut-être trop délaissé.

Nous mentionnerons encore la théorie de Rameau [3]. Selon l'illustre musicien dijonnais, la consonnance s'explique par la propriété que possèdent naturellement les corps d'émettre, outre le son fondamental, toute une série d'harmoniques, propriété qu'il appelle la

(1) SAUVEUR, *Mémoires de l'Académie;* 1700.
(2) EULER, *Mémoires de l'Académie;* 1740.
(3) RAMEAU, *Nouveau système de musique théorétique.* Paris; 1726 ; et *Démonstration du principe de l'harmonie.* Paris ; 1750. Voir aussi d'ALEMBERT, *Éléments de musique suivant les principes de Rameau.* Lyon ; 1762.

résonnance multiple. L'octave n'étant d'ailleurs qu'une *réplique*, l'oreille rabaisse d'elle-même les harmoniques au degré voulu pour les consonnances. Sans doute, l'explication est insuffisante; mais Rameau a posé un principe exact en affirmant le rôle capital des harmoniques dans les accords.

Théorie de M. von Helmholtz. — La théorie de M. von Helmholtz s'appuie sur ce fait que les battements déterminent dans certains nerfs auditifs une excitation intermittente, désagréable comme toutes les excitations du même genre (lumière papillotante, grattements, etc.). D'après M. von Helmoltz, le summum du désagrément correspond à 33 battements par seconde : telle est la discordance aigre et sifflante produite par le concours de si_3 495^{vd} et de ut_4 528^{vd}. Au delà de 132, les battements cessent d'être perceptibles : la quinte ut_3 264^{vd} — sol_3 396^{vd} est parfaitement consonnante. La quarte ut_3 264^{vd} — fa_3 352^{vd} (différence 88^{v}) accuse déjà un commencement de dureté qui s'accentue dans les tierces ut_3 264^{vd} — mi_3 330^{vd} (différence 66^{vd}) et ut_3 264^{vd} — $mi_3\flat$ 308^{vd} (différence 44^{vd}). Dans les octaves graves, les tierces deviendront de vraies dissonances. Toutefois, suivant M. von Helmholtz, la netteté des battements et par suite la dureté de l'intervalle ne dépend pas seulement de la différence absolue des nombres de vibrations; elle tient aussi au rapport de ces nombres, autrement dit à la grandeur de l'intervalle. Ainsi

le demi-ton.	si_3 495^{vd}	— ut_4 528^{vd}
le ton.	ut_3 264	— $ré_3$ 297,
la tierce mineure.	mi_2 165	— sol_2 198,
la tierce majeure.	ut_2 132	— mi_2 165,
la quarte.	sol_1 99	— ut_2 132,
la quinte.	ut_1 66	— sol_1 99,

qui donnent tous 33 battements, sont d'une dureté manifestement décroissante. On comprend en effet que si deux sons se trouvent suffisamment éloignés dans l'échelle musicale, les fibres auditives simultanément ébranlées par ces deux sons vibrent trop faiblement pour que les battements soient encore appréciables.

Jusqu'ici nous avons supposé les deux sons concomitants

simples tous les deux. Mais les sons musicaux sont toujours accompagnés d'harmoniques, dont l'importance ressort immédiatement des rapprochements ci-dessous :

Unisson........	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Octave.........	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		2		4		6		8		10	
Douzième......	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
			3			6			9		
Quinte.........	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
	3	6	9	12	15	18	21				
Quarte.........	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
	4	8	12	16	20	24	28	32			
Sixte majeure..	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
	5	10	15	20	25	30					
Tierce majeure.	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
	5	10	15	20	25	30	35	40			
Tierce mineure.	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
	6	12	18	24	30	36	42	48	54		
Sixte mineure..	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
	8	16	24	32	40	48	56				

Les harmoniques de deux sons à l'unisson coïncident tous : la consonnance est *absolue;* et le moindre désaccord se traduira par un trouble complet, tous les harmoniques battant deux à deux.

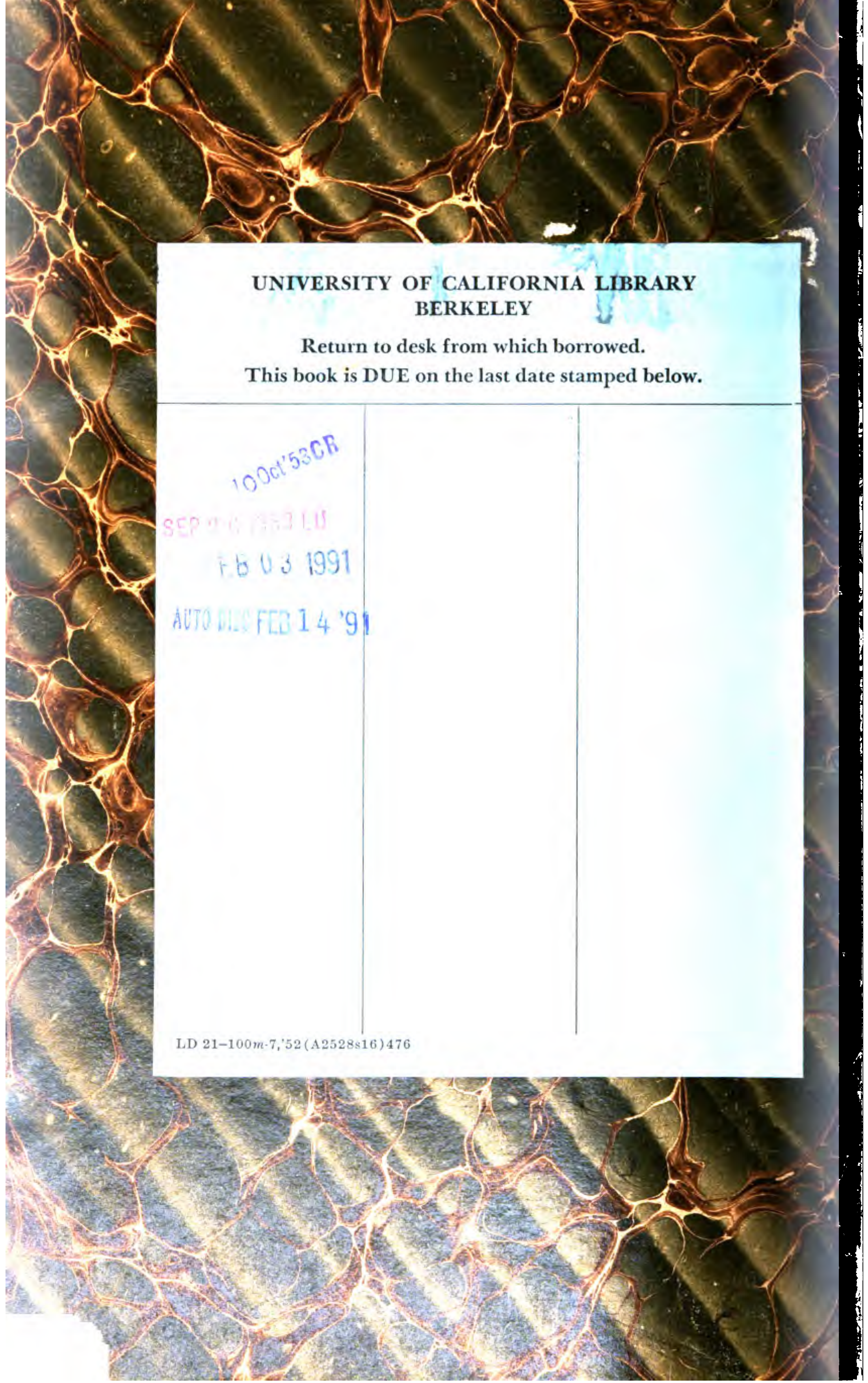
Tous les éléments de l'octave existent déjà dans la tonique qui se trouve ainsi simplement renforcée : la consonnance est absolue et rigoureuse.

A la douzième, le deuxième son ne fait encore que renforcer certains éléments du premier. Il en serait de même pour la dix-septième, etc. Néanmoins, comme d'ordinaire l'intensité des harmoniques va en décroissant rapidement, la délimitation des intervalles fondée sur la coïncidence des harmoniques supérieurs sera d'autant plus vague pour l'oreille que ces harmoniques seront plus élevés.

Après ces consonnances absolues se placent la quinte et la quarte, que M. von Helmholtz appelle consonnances *parfaites* parce qu'elles peuvent être employées dans toutes les régions de la gamme sans altération sensible de l'harmonie des intervalles. Toutefois, la quarte est moins parfaite que la quinte et se rapproche des consonnances suivantes, sixte majeure et tierce mineure, que l'on peut appeler consonnances *moyennes*, bonnes dans l'aigu mais mauvaises dans le grave, quoique encore nettement caractérisées avec les timbres vigoureux.

Viennent enfin les consonnances *imparfaites* de la tierce mineure et de la sixte mineure, mal caractérisées, et pires que les précédentes dans les régions graves.

L'influence des harmoniques ne se limite pas aux consonnances : « un même harmonique, commun à deux notes d'une mélodie, donne à ces deux sons une espèce de parenté que l'oreille perçoit et qui peut servir de lien artistique entre eux. »


UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
BERKELEY
Return to desk from which borrowed.
This book is DUE on the last date stamped below.
10Oct'53CR
FEB 03 1991
AUTO DISC FEB 14 '91
LD 21-100m-7,'52 (A2528s16) 476


YC 11326
U.C. BERKELEY LIBRARIES
C008446989
QC21
V5
V.2:1
38966

